Prob. di Cauchy a variabili non separabili

$$\begin{cases} y' + \dfrac{2y}{x} = \dfrac{1}{x^2} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

$\longleftarrow$ NB! Variabili non sono separabili!!!

Prob. in forma generale:

$$\begin{cases} y'(x) + a(x) \cdot y(x) = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Soluzione:

$$\begin{cases} A(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} a(x)\,dx \\ y(x) = y_0\, e^{-A(x)} + e^{-A(x)} \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(x) \cdot e^{A(x)}\,dx \end{cases}$$

$$A(x) = \int_1^x \frac{2}{x}\,dx = 2\ln|x|\Big|_1^x = 2\ln|x| - \underbrace{2\ln(1)}_{0}$$

$$= 2\ln|x|$$

$$y(x) = 1\,e^{-\cancel{2}\ln|x|^2} + e^{-\cancel{2}\ln|x|^2}\int_1^x \frac{1}{x^2}\,e^{\cancel{2}\ln|x|^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2}\int_1^x \frac{1}{\cancel{x^2}}\cdot(\cancel{x^2})\,dx$$

$$= \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2}\cdot x\Big]_1^x$$

$$= \frac{1}{x^2}\left[\cancel{1} + x - \cancel{1}\right] = \frac{1}{x}$$

$$\boxed{|x|^2 = x}$$

$$\boxed{e^{\ln|x|} = |x|}$$

$$\boxed{e^{-\ln|x|} = \frac{1}{e^{\ln|x|}} = \frac{1}{|x|}}$$

infine $\boxed{y(x) = \frac{1}{x}}$

NB!! Per verificare se la soluzione e' ok sostituisco nell'eq di partenza per vede l'uguaglianza:

$$\boxed{y' + \frac{2y}{x} = \frac{1}{x^2}}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' + \frac{2}{x}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2}$$

$$\boxed{\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}}$$

$$= \frac{(1)'(x) - (1)(x)'}{x^2} = \frac{0 - 1}{x^2} = -1/x^2$$

$$-\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^2} = \frac{1}{x^2}$$

$$\boxed{\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2}}$$ ok!

C.C. (verifica)

$$y(x) = \frac{1}{x}$$

$$y(1) = \frac{1}{1} = 1$$ ok!