



Università degli Studi di Trento

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Civile

Inclusioni e concentrazioni di sforzo in materiali elastici:
Funzione di Green non locale e Metodo dei potenziali complessi

Laureando: Summer Shahzad

Relatore: Dr. Francesco Dal Corso

Introduzione

elementi strutturali ad elevata prestazione

l'impiego di materiali compositi

formati da

l'inclusione

matrice

rigida

soffice

Obiettivo:

Inclusioni comportano concentrazioni di sforzo con la conseguente crisi tra matrice e l'inclusione stessa. Gli approcci analitici per studiare questo problema sono due:

1. Equazioni integrali basate sulla funzione di Green
2. Metodo dei potenziali complessi

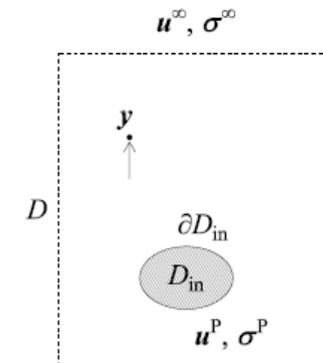
1. Funzione di Green e equazioni integrali

Le funzioni di Green definite $u_j^g(\mathbf{r})$ è chiamata tensore della funzione di Green

$$u_j^g(\mathbf{r}) = \frac{1}{8\pi\mu} \left[\delta_{gj} \nabla^2 \mathbf{r} - \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial x_g \partial x_j} \right]$$

consentono un approccio di tipo perturbativo al problema dell'inclusione in un mezzo elastico. La soluzione viene decomposta come segue:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \boldsymbol{\sigma}^\infty + \boldsymbol{\sigma}^P \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \boldsymbol{\varepsilon}^\infty + \boldsymbol{\varepsilon}^P \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}^\infty + \mathbf{u}^P \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{campi perturbati dall'inclusione} \\ \text{incogniti} \end{array}$$



si ottiene:

l'equazione integrale per il campo degli spostamenti per un generico punto \mathbf{y} al di fuori dell'inclusione:

$$u_g(\mathbf{y}) = u_g^\infty(\mathbf{y}) + \int_{\partial D_{in}} \left[(\sigma_{ij}^P + \sigma_{ij}^\infty) u_i^g - (u_i^P + u_i^\infty) \sigma_{ij}^g \right] n_j dl_{\mathbf{x}}$$

2. Metodo dei potenziali complessi

Dalla funzione di Airy alle combinazioni fondamentali per le tensioni

$$\nabla^4 F(x, y) = 0$$

$$f(z, \bar{z}) = \operatorname{Re}[\bar{z}\varphi(z) + \int \psi(z)]$$

Forma dei potenziali complessi $\varphi(z)$ e $\psi(z)$

$$\varphi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^{-n} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n + a_0$$

$$\psi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n z^{-n} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n + b_0$$

Da cui è possibile ricavare la singola componente delle tensioni e degli spostamenti:

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = \operatorname{Re}[2\varphi'(z) - e^{2i\vartheta} [(\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z))] \\ \sigma_{\vartheta\vartheta} = \operatorname{Re}[2\varphi'(z) + e^{2i\vartheta} [(\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z))] \\ \sigma_{r\vartheta} = \operatorname{Im}[e^{2i\vartheta} [(\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z))] \\ u_r = \frac{1}{2\mu} \operatorname{Re}\left[e^{-i\vartheta} (\kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)})\right] \\ u_{\vartheta} = \frac{1}{2\mu} \operatorname{Im}\left[e^{-i\vartheta} (\kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)})\right] \end{cases}$$

Traccia della soluzione:

1. Scelta dei potenziali complessi

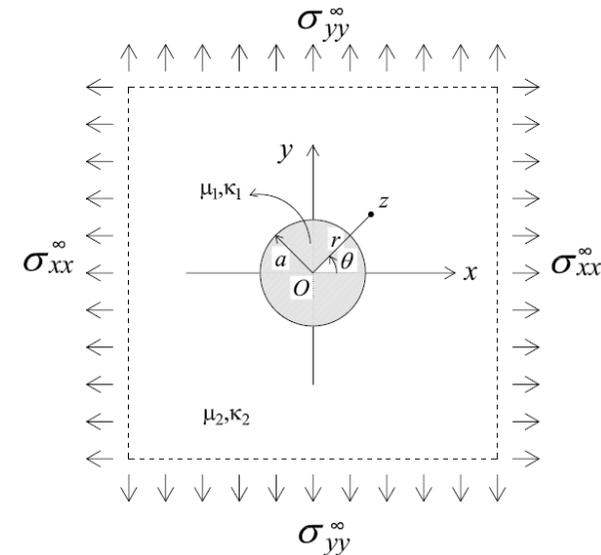
- Inclusione - materiale 1 ($r < a$):
- Matrice - materiale 2 ($r > a$):

$$\varphi_1(z) = a_1 z$$

$$\psi_1(z) = b_1 z$$

$$\varphi_2(z) = c_0 z + \frac{c_1}{z}$$

$$\psi_2(z) = d_0 z + \frac{d_1}{z} + \frac{d_2}{z^3}$$



2. Calcolo del campo degli sforzi e degli spostamenti in funzione dei potenziali complessi scelti

3. Per trovare le costanti $a_1, b_1, c_0, c_1, d_0, d_1$ e d_2 si pongono le condizioni al contorno(c.c.) ovvero 4 c.c. sull'interfaccia e 3 c.c. all'infinito

- $[\sigma_{rr1}]|_{r=a} = [\sigma_{rr2}]|_{r=a}$
- $[\sigma_{r\theta1}]|_{r=a} = [\sigma_{r\theta2}]|_{r=a}$
- $[u_{r1}]|_{r=a} = [u_{r2}]|_{r=a}$
- $[u_{\theta1}]|_{r=a} = [u_{\theta2}]|_{r=a}$
- $[\sigma_{xx2}]|_{r \rightarrow \infty} = \sigma_{xx}^{\infty}$
- $[\sigma_{yy2}]|_{r \rightarrow \infty} = \sigma_{yy}^{\infty}$
- $[\sigma_{xy2}]|_{r \rightarrow \infty} = 0$

Metodo dei potenziali complessi: inclusione elastica di forma circolare

4. Trovate le costanti generali si hanno i 4 potenziali complessi incogniti

- $\varphi_1(z) = \left[\frac{\mu_1(1+\kappa_2)(\sigma_{xx}^\infty + \sigma_{yy}^\infty)}{4(2\mu_1 + (-1+\kappa_1)\mu_2)} \right] z$
- $\psi_1(z) = \left[-\frac{\mu_1(1+\kappa_2)(\sigma_{xx}^\infty - \sigma_{yy}^\infty)}{2(\kappa_2\mu_1 + \mu_2)} \right] z$
- $\varphi_2(z) = \left[\frac{\sigma_{xx}^\infty + \sigma_{yy}^\infty}{4} \right] z - \left[\frac{a^2(\mu_1 - \mu_2)(\sigma_{xx}^\infty - \sigma_{yy}^\infty)}{2(\kappa_2\mu_1 + \mu_2)} \right] \frac{1}{z}$
- $\psi_2(z) = \left[\frac{-\sigma_{xx}^\infty + \sigma_{yy}^\infty}{2} \right] z + \left[\frac{a^2((\kappa_2 - 1)\mu_1 + \mu_2 - \kappa_1\mu_2)(\sigma_{xx}^\infty + \sigma_{yy}^\infty)}{2(2\mu_1 + (\kappa_1 - 1)\mu_2)} \right] \frac{1}{z} - \left[\frac{a^4(\mu_1 - \mu_2)(\sigma_{xx}^\infty - \sigma_{yy}^\infty)}{2(\kappa_2\mu_1 + \mu_2)} \right] \frac{1}{z^3}$

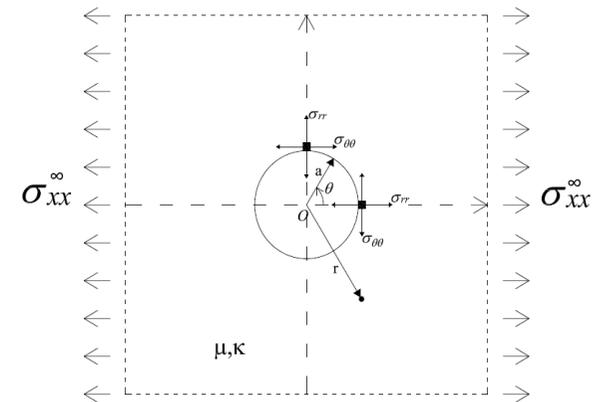
5. Infine si ottiene il campo degli sforzi

- $$\sigma_{rr}(r, \theta) = \frac{1}{2} Re \left[\sigma_{xx}^\infty + \frac{2a^2 e^{-2i\theta} (\mu_1 - \mu_2) (\sigma_{xx}^\infty - \sigma_{yy}^\infty)}{r^2 (\kappa_2 \mu_1 + \mu_2)} + \sigma_{yy}^\infty + e^{2i\theta} \left(\sigma_{xx}^\infty + \frac{3a^4 e^{-2i\theta} (\mu_1 - \mu_2) (\sigma_{xx}^\infty - \sigma_{yy}^\infty)}{r^4 (\kappa_2 \mu_1 + \mu_2)} \right) \right] + e^{2i\theta} \left(\frac{2a^2 e^{-4i\theta} (\mu_1 - \mu_2) (\sigma_{xx}^\infty - \sigma_{yy}^\infty)}{r^2 (\kappa_2 \mu_1 + \mu_2)} + \sigma_{yy}^\infty - \frac{a^2 e^{-2i\theta} ((\kappa_2 - 1)\mu_1 + \mu_2 - \kappa_1\mu_2) (\sigma_{xx}^\infty + \sigma_{yy}^\infty)}{r^2 (2\mu_1 + (\kappa_1 - 1)\mu_2)} \right)$$
- $$\sigma_{\theta\theta}(r, \theta) = \frac{1}{2} Re \left[\left(-e^{2i\theta} + \frac{3a^4 e^{-2i\theta} (\mu_1 - \mu_2) (\sigma_{xx}^\infty - \sigma_{yy}^\infty)}{r^4 (\kappa_2 \mu_1 + \mu_2)} + \frac{a^2 ((\kappa_2 - 1)\mu_1 + \mu_2 - \kappa_1\mu_2)}{r^2 (2\mu_1 + (\kappa_1 - 1)\mu_2)} \right) \sigma_{xx}^\infty \right] + \sigma_{yy}^\infty \left(e^{2i\theta} - \frac{3a^4 e^{-2i\theta} (\mu_1 - \mu_2) (\sigma_{xx}^\infty - \sigma_{yy}^\infty)}{r^4 (\kappa_2 \mu_1 + \mu_2)} \right) + \sigma_{yy}^\infty \frac{a^2 e^{-2i\theta} ((\kappa_2 - 1)\mu_1 + \mu_2 - \kappa_1\mu_2) (\sigma_{xx}^\infty + \sigma_{yy}^\infty)}{r^2 (2\mu_1 + (\kappa_1 - 1)\mu_2)}$$
- $$\sigma_{r\theta}(r, \theta) = \frac{1}{2} Im \left[e^{2i\theta} \left(-\sigma_{xx}^\infty + \frac{3a^4 e^{-2i\theta} (\mu_1 - \mu_2) (\sigma_{xx}^\infty - \sigma_{yy}^\infty)}{r^4 (\kappa_2 \mu_1 + \mu_2)} - \frac{2a^2 e^{-4i\theta} (\mu_1 - \mu_2) (\sigma_{xx}^\infty - \sigma_{yy}^\infty)}{2^4 (\kappa_2 \mu_1 + \mu_2)} \right) + \sigma_{yy}^\infty \right] + \frac{a^2 e^{-2i\theta} ((\kappa_2 - 1)\mu_1 + \mu_2 - \kappa_1\mu_2) (\sigma_{xx}^\infty + \sigma_{yy}^\infty)}{r^2 (2\mu_1 + (\kappa_1 - 1)\mu_2)}$$

Metodo dei potenziali complessi: Problema di Kirsch

1. Primo caso limite: $\mu_1 \rightarrow 0$ si ha il problema dell'inclusione vuota (Kirsch (1898)).

Campo degli sforzi risulta **indipendente** da μ e κ .



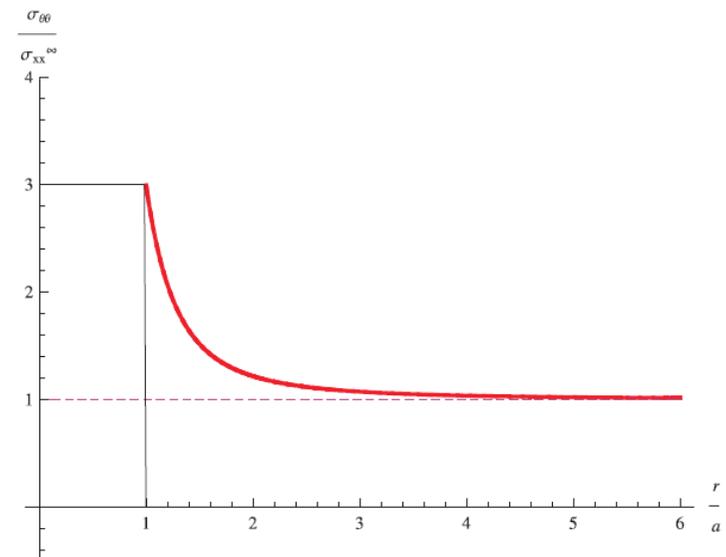
Fattore di concentrazione di sforzo

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\sigma_{\theta\theta}(r \rightarrow a, \theta \rightarrow 0)}{\sigma_{xx}^{\infty}} = -1 \\ \frac{\sigma_{\theta\theta}(r \rightarrow a, \theta \rightarrow \frac{\pi}{2})}{\sigma_{xx}^{\infty}} = 3 \end{array} \right.$$

Sforzo di trazione triplicato

Crisi del materiale inizia nel punto

$$\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}, r \rightarrow a$$



Metodo dei potenziali complessi: inclusione infinitamente rigida circolare

2. Secondo caso limite: $\mu_1 \rightarrow \infty$ si ha il problema dell'inclusione infinitamente rigida

Campo degli sforzi risulta **dipendente** da μ_2 e κ_2 .

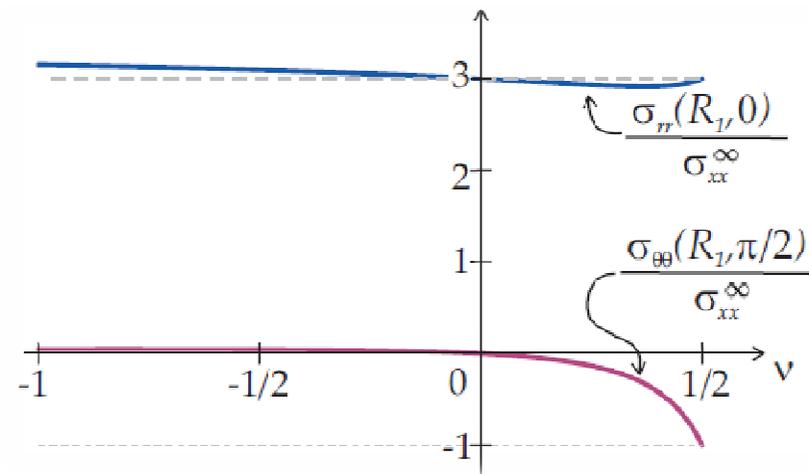
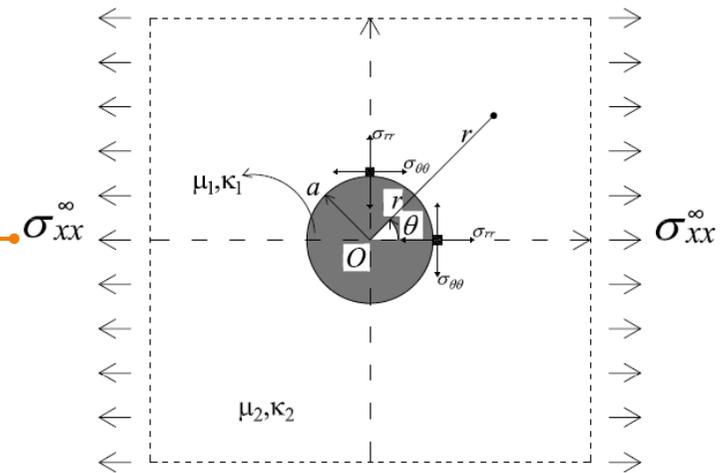
Fattore di concentrazione di sforzo = $f(\kappa)$

$$\kappa = \begin{cases} 3-4\nu & \text{: stato piano di deformazione} \\ \frac{3-\nu}{1+\nu} & \text{: per stato piano di tensione} \end{cases}$$

Fattore di concentrazione di sforzo per ν che varia tra -1 e 0.5 per stato piano di deformazione.

La crisi tra matrice e inclusione si ha per

$$r = a ; \theta = 0$$

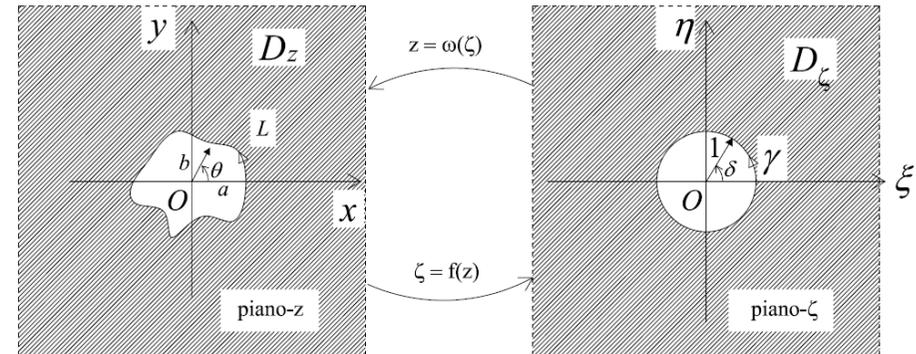


Inclusione di forma generica

1) Consente di passare dal dominio reale complesso ad uno più semplice

$$\varphi(z) = \varphi(\omega(\zeta)) = \varphi(\zeta).$$

$$\psi(z) = \psi(\omega(\zeta)) = \psi(\zeta)$$



Condizioni al contorno negli spostamenti

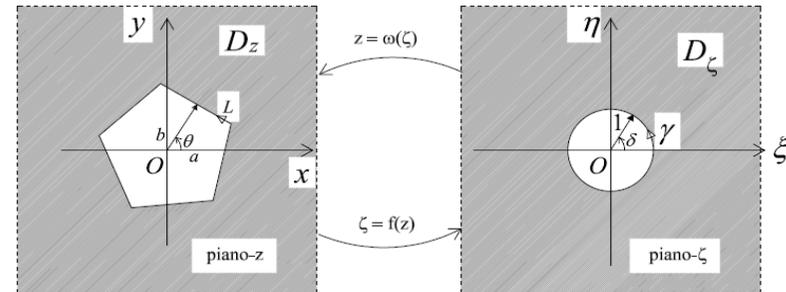
$$\begin{cases} \kappa\varphi(\sigma) - \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)}\overline{\varphi'(\sigma)} - \overline{\psi(\sigma)} = 2\mu(g_1 + ig_2) = 2\mu g \\ \overline{\kappa\varphi(\sigma)} - \frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\overline{\omega'(\sigma)}}\varphi'(\sigma) - \psi(\sigma) = 2\mu(g_1 - ig_2) = 2\mu\bar{g} \end{cases}$$

Trasformazione delle tensioni e degli spostamenti

$$\begin{cases} \sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 4\text{Re} \left[\frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \right] = 2 \left[\frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} + \frac{\overline{\varphi'(\zeta)}}{\overline{\omega'(\zeta)}} \right] \\ \sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\sigma_{xy} = 2 \left[\frac{\psi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} + \frac{\overline{\omega(\zeta)}}{\omega(\zeta)^3} (\varphi''(\zeta)\omega'(\zeta) - \varphi'(\zeta)\omega''(\zeta)) \right] \\ 2\mu(u_1 + iu_2) = \kappa\varphi(\zeta) - \frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)}\overline{\varphi'(\zeta)} - \overline{\psi(\zeta)} \end{cases}$$

Tecnica della trasformazione conforme: integrale di Schwarz-Christoffel

Trasformazione di un poligono in un cerchio



Integrale di Schwarz-Christoffel

$$z = \omega(\zeta) = c \int_1^{\zeta} \prod_{i=1}^n (t - a_i)^{\alpha_i - 1} \frac{dt}{t^2} + k_0$$

$$z = \omega(\zeta) = c \int_1^{\zeta} (t - a_1)^{\alpha_1 - 1} \cdot (t - a_2)^{\alpha_2 - 1} \cdot (t - a_3)^{\alpha_3 - 1} \dots (t - a_n)^{\alpha_n - 1} \frac{dt}{t^2} + k_0$$

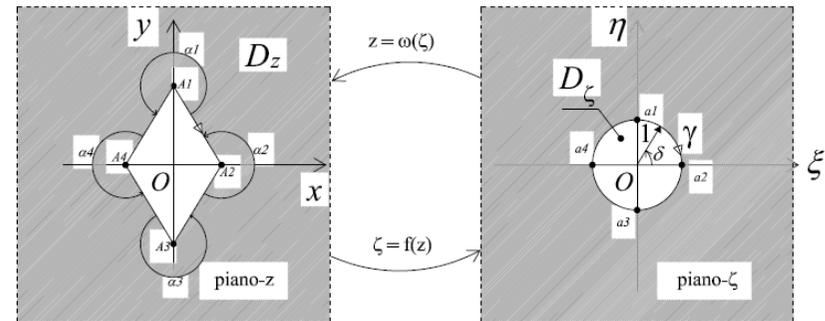
Una volta osservato che la somma degli angoli esterni di un poligono convesso con j lati è uguale a $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = n + 2$, ove n sono i vertici del poligono, l'integrando si trasforma in:

$$z = \omega(\zeta) = c \int_1^{\zeta} \left(1 - \frac{a_1}{t}\right)^{\alpha_1 - 1} \cdot \left(1 - \frac{a_2}{t}\right)^{\alpha_2 - 1} \cdot \left(1 - \frac{a_3}{t}\right)^{\alpha_3 - 1} \dots \left(1 - \frac{a_n}{t}\right)^{\alpha_n - 1} dt.$$

Applicazioni dell'integrale di Schwarz-Christoffel

Conformal function per il Rombo

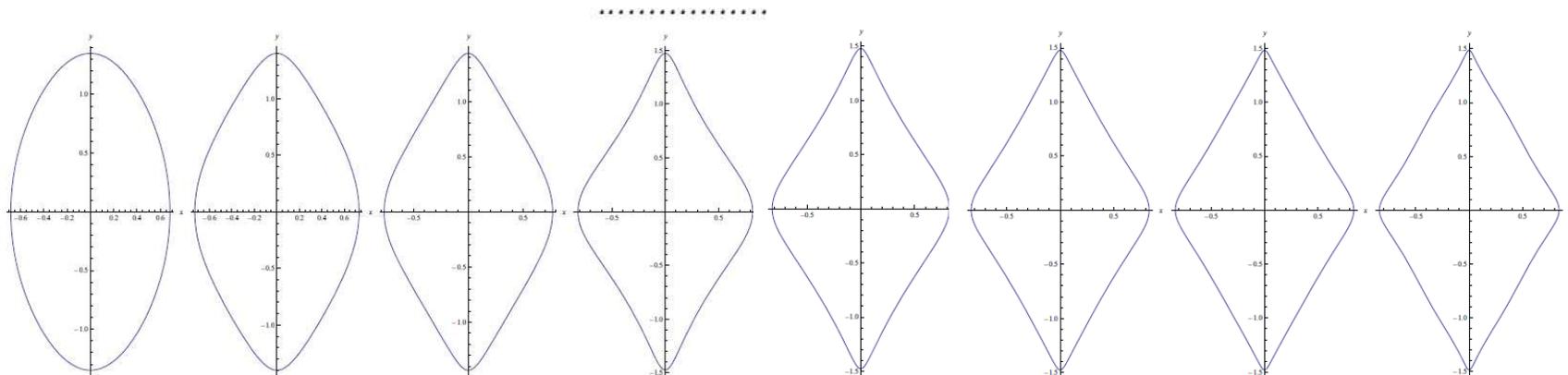
$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 = e^{i\delta} = e^{i\frac{\pi}{2}} \\ a_2 = 1e^{i\delta} = e^{i0} = 1 \\ a_3 = 1e^{i\delta} = e^{i\frac{3\pi}{2}} \\ a_4 = 1e^{i\delta} = e^{i\pi} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = \frac{5}{3} \\ \alpha_2 = \frac{4}{3} \\ \alpha_3 = \frac{5}{3} \\ \alpha_4 = \frac{4}{3} \end{array} \right.$$



$$\omega_1(\zeta) = \zeta - \frac{1}{3\zeta} + \frac{4}{243\zeta^3}$$

$$\omega_2(\zeta) = \zeta - \frac{1}{3\zeta} + \frac{16}{243\zeta^3} - \frac{1}{1215\zeta^5} + \frac{16}{45927\zeta^7}$$

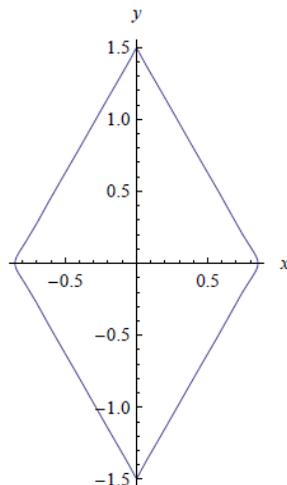
$$\omega_3(\zeta) = \zeta - \frac{1}{3\zeta} + \frac{74}{729\zeta^3} + \frac{2}{3645\zeta^5} + \frac{107}{413343\zeta^7} - \frac{71}{4782969\zeta^9} + \frac{400}{473513931\zeta^{11}}$$



Conformal function per il Rombo

Infine per una approssimazione della serie con $j = 15$ termini si ottiene un rombo con una buona approssimazione:

$$\begin{aligned} \omega_{15}(\zeta) = & \zeta - \frac{1}{3\zeta} + \frac{74}{729\zeta^3} + \frac{2}{3645\zeta^5} + \frac{107}{413343\zeta^7} - \frac{71}{4782969\zeta^9} + \frac{400}{473513931\zeta^{11}} + \frac{28}{19683\zeta^{13}} + \\ & + \frac{636088154}{470715894135\zeta^{15}} + \frac{76105538}{1600434040059\zeta^{17}} + \frac{338525804}{7625597484987\zeta^{19}} + \frac{5672494148}{1441237924662543\zeta^{21}} + \\ & + \frac{1899350582680}{127858393030777029\zeta^{23}} + \frac{105469017344}{50031545098999707\zeta^{25}} + \frac{791294940996340}{109418989131512359209\zeta^{25}} + \\ & + \frac{480069313223548}{352572298312650935229\zeta^{25}} + \frac{22413704243116739}{30527897967691948219311\zeta^{25}} + \dots + \\ & + \frac{4386481018291340495587541401600}{706378395771159167527561661576305779235179\zeta^{59}} \end{aligned}$$



Raggio di curvatura nei vertici:

$$\begin{cases} r \cong \frac{1}{13} R, & \text{per } \theta \rightarrow 0 \\ r \cong \frac{1}{247} R, & \text{per } \theta \rightarrow \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$R = \frac{a+b}{2}$$

Traccia della soluzione: inclusione rigida romboidale [1]

Traccia della soluzione:

$$\omega(\zeta) = R \left(\frac{1}{\zeta} + e_1 \zeta + e_2 \zeta^3 \right)$$

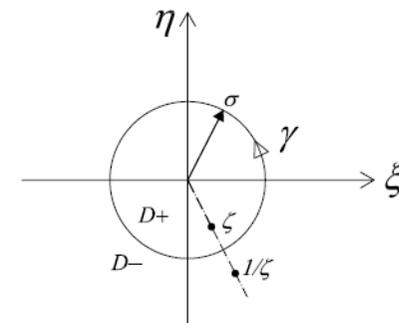
ove le costanti reali valgono $e_1 = -\frac{2}{3}$ e $e_2 = \frac{5}{54}$

Le condizioni al contorno (c.c.) sugli spostamenti al contorno prendono la forma seguente:

$$\begin{cases} k\varphi(\sigma) - \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{\varphi'(\sigma)} - \overline{\psi(\sigma)} = 0 \\ k\overline{\varphi(\sigma)} - \frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\overline{\omega'(\sigma)}} \varphi'(\sigma) - \psi(\sigma) = 0 \end{cases}$$

se si valuta il conformal function della Figura sul contorno $\sigma = e^{i\theta}$ del cerchio di raggio unitario si ottiene

$$\omega(\sigma) = R \left(\frac{1}{\sigma} + e_1 \sigma + e_2 \sigma^3 \right)$$



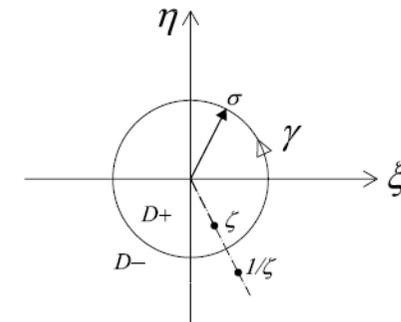
Traccia della soluzione: inclusione rigida romboidale [2]

$$\begin{cases} \varphi(\zeta) = \Gamma\omega(\zeta) + \varphi^*(\zeta) \\ \psi(\zeta) = \Gamma'\omega(\zeta) + \psi^*(\zeta) \end{cases}$$

ove $\varphi^*(\zeta)$ e $\psi^*(\zeta)$ sono funzioni olomorfe dentro al cerchio di raggio unitario contenuto nel piano infinito e hanno la forma

$$\varphi^*(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} a^n \zeta^n$$

$$\psi^*(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} b^n \zeta^n$$



$$\begin{cases} \varphi(\sigma) = \frac{\Gamma R}{\sigma} + \Gamma R [e_1\sigma + e_2\sigma^3] + \varphi^*(\sigma) \\ \psi(\sigma) = \frac{\Gamma' R}{\sigma} + \Gamma' [e_1\sigma + e_2\sigma^3] + \psi^*(\sigma) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi(\sigma) = \frac{\Gamma R}{\sigma} + \varphi_1(\sigma) \\ \psi(\sigma) = \frac{\Gamma' R}{\sigma} + \psi_1(\sigma) \end{cases}$$

si noti che $\varphi_1(\sigma)$ e $\psi_1(\sigma)$ sono olomorfe fuori del cerchio di raggio unitario.

sostituendo le ultime nelle condizioni al contorno si giunge a

$$k \frac{\Gamma R}{\sigma} + k \varphi_1(\sigma) - \frac{\sigma + e_1 \sigma^3 + e_2 \sigma^5}{-\sigma^4 + e_1 \sigma^2 - 3e_2} \left[-\Gamma R \sigma^2 + \overline{\varphi_1'(\sigma)} \right] - \Gamma' R \sigma - \overline{\psi_1(\sigma)} = 0.$$

$$\varphi_1(\zeta) = \sum_{n=1}^3 a^n \zeta^n = a_1 \zeta + a_2 \zeta^2 + a_3 \zeta^3$$

Integrando quest'ultima secondo Cauchy

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \left[\frac{\sigma + e_1 \sigma^3 + e_2 \sigma^5}{-\sigma^4 + e_1 \sigma^2 - 3e_2} (\overline{a_1}) \right] \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} = \overline{a_1} [-e_2 \zeta + f_1(\zeta)]$$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \left[\frac{\sigma + e_1 \sigma^3 + e_2 \sigma^5}{-\sigma^4 + e_1 \sigma^2 - 3e_2} \left(\frac{2\overline{a_2}}{\sigma} \right) \right] \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} = 2\overline{a_2} [-e_2 + f_2(\zeta)]$$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \left[\frac{\sigma + e_1 \sigma^3 + e_2 \sigma^5}{-\sigma^4 + e_1 \sigma^2 - 3e_2} \left(\frac{3\overline{a_3}}{\sigma^2} \right) \right] \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} = 3\overline{a_3} [0 + f_3(\zeta)]$$

Se si confrontano le pari potenze a destra e sinistra dell'equazione precedente si ottiene un sistema lineare

$$k (a_1 \zeta + a_2 \zeta^2 + a_3 \zeta^3) + \overline{a_1} (e_2) \zeta + 2\overline{a_2} (e_2) = \Gamma R (e_2) \zeta^3 + [\Gamma' R + \Gamma R e_1 (1 + e_2)] \zeta$$

Traccia della soluzione: inclusione rigida romboidale [4]

Se si confrontano le pari potenze a destra e sinistra dell'equazione precedente si ottiene un sistema lineare

$$\begin{cases} ka_1 + e2\bar{a}_1 = R[\Gamma' + \Gamma e_1(1 + e_2)] \\ ka_2 = 0 \\ ka_3 = \Gamma Re_2 \end{cases}$$

con $\bar{a}_1 = a_{11} + a_{12}i$ costante complessa. Si ricavano perciò le costanti

- $a_1 = \frac{R[\Gamma' + \Gamma e_1(1 + e_2)]}{k + e_2}$
- $a_2 = 0$
- $a_3 = \frac{\Gamma Re_2}{k}$

le quali permettono di scrivere

$$\varphi_1(\zeta) = \frac{R[\Gamma' + \Gamma e_1(1 + e_2)]}{k + e_2} \zeta + \frac{\Gamma Re_2}{k} \zeta^3$$

ed infine giungere a

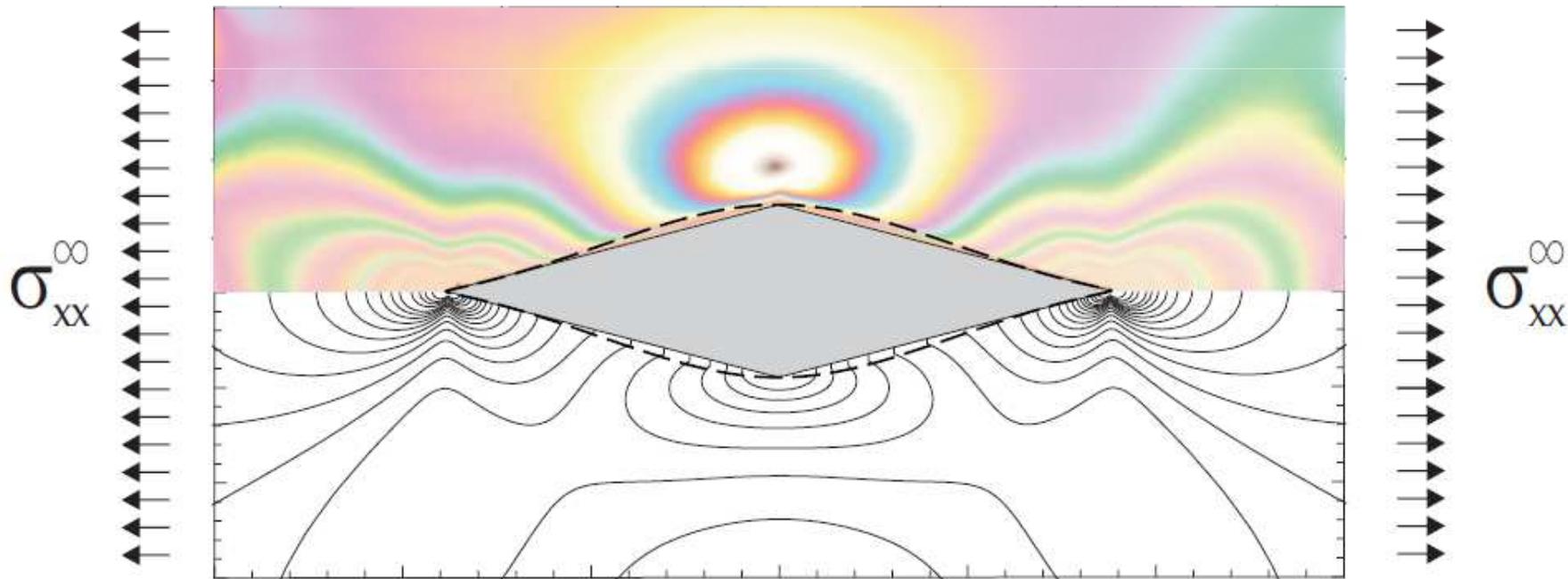
$$\varphi(\zeta) = \frac{\Gamma R}{\zeta} + \frac{R[\Gamma' + \Gamma e_1(1 + e_2)]}{k + e_2} \zeta + \frac{\Gamma Re_2}{k} \zeta^3$$

Traccia della soluzione: inclusione rigida romboidale [5]

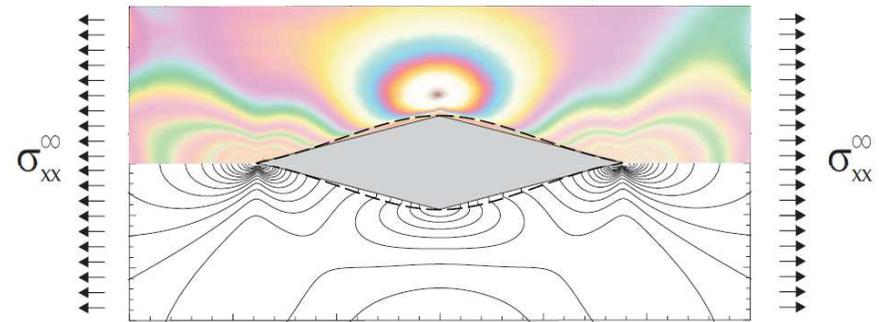
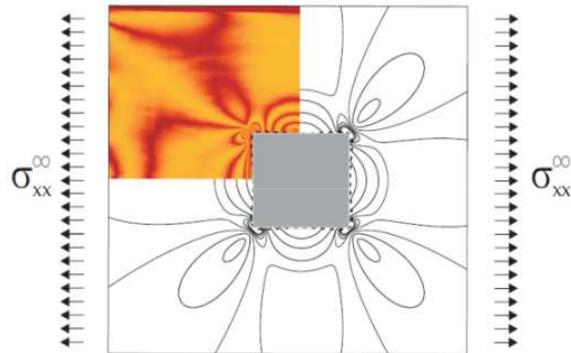
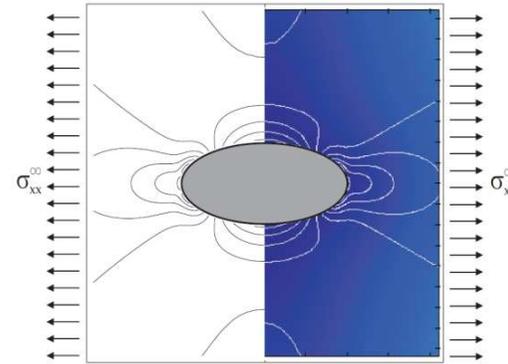
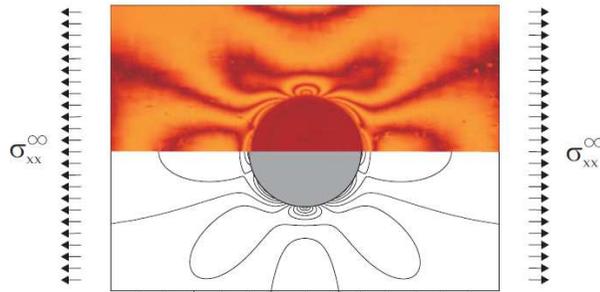
- La differenza delle tensioni principali

$$\sigma_I - \sigma_{II} = \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\sigma_{xy}^2}$$

Confronto qualitativo tra risultati analitici e sperimentali



Conclusioni



Conclusioni

1. Sono state ottenute soluzioni analitiche per il problema di materiali contenenti inclusioni
2. Queste soluzioni impiegate nel caso di inclusioni infinitamente rigide hanno consentito una validazione del modello teorico di inclusione rigida (rigidezza infinita e perfetta adesione) dimostrando l'effettivo sviluppo di campi singolari in prossimità di cuspidi



Grazie per l'attenzione!