



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRENTO

Facoltà di Ingegneria  
Corso di Laurea in Ingegneria Civile

Inclusioni e concentrazioni di sforzo in materiali elastici:  
Funzione di Green non locale e Metodo dei potenziali  
complessi

Relatore  
Prof. Francesco Dal Corso

Laureando  
Summer Shahzad

Anno Accademico 2011-12

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Problemi in elasticità piana e funzione di Airy</b>	<b>5</b>
2.1	Elasticità piana . . . . .	7
2.1.1	Stato piano di deformazione . . . . .	7
2.1.2	Stato piano di tensione . . . . .	8
2.1.3	Formulazione del problema al contorno per gli stati piani	8
2.1.4	Funzione di Airy . . . . .	9
2.2	Lastra omogenea soggetta a tensione biassiale costante all'infinito . . . . .	12
2.3	Lastra contenente un'inclusione circolare e soggetta a tensione biassiale costante all'infinito . . . . .	14
2.3.1	Stato di tensione all'infinito costante . . . . .	14
2.4	Singularità tensionale in presenza di vuoti o inclusioni rigide a cuspidi . . . . .	20
2.4.1	Singularità ammissibili . . . . .	22
2.4.2	Condizioni di simmetria . . . . .	23
2.4.3	Condizioni al contorno e singularità possibili . . . . .	23
<b>3</b>	<b>Funzioni di Green e equazioni integrali</b>	<b>27</b>
3.1	Problema dell'inclusione . . . . .	28
<b>4</b>	<b>Metodo dei potenziali complessi</b>	<b>31</b>
4.1	Introduzione . . . . .	31
4.2	Numeri complessi e loro rappresentazione geometrica . . . . .	31
4.3	Potenziali complessi per domini semplicemente connessi . . . . .	33
4.3.1	Derivate formali di Cauchy . . . . .	33
4.3.2	Dalla funzione di Airy alle combinazioni fondamentali per le tensioni . . . . .	35

4.3.3	Forma dei potenziali complessi $\varphi(z)$ e $\psi(z)$ . . . . .	39
4.4	Applicazioni . . . . .	39
4.4.1	Problema della lastra infinita . . . . .	39
4.4.2	Problema dell'inclusione elastica circolare . . . . .	43
4.4.2.1	Confronto qualitativo tra risultati analitici e sperimentali per l'inclusione infinitamente rigida di forma circolare . . . . .	46
<b>5</b>	<b>Tecnica della trasformazione conforme</b>	<b>49</b>
5.1	Definizione . . . . .	50
5.2	Formulazione delle trasformazioni conformi . . . . .	50
5.2.1	Trasformazione delle tensioni e degli spostamenti . . .	52
5.2.2	Trasformazione delle condizioni al contorno . . . . .	52
5.2.2.1	Condizioni al contorno nelle tensioni . . . . .	52
5.2.2.2	Condizioni al contorno negli spostamenti . .	53
5.2.3	I potenziali complessi in forma generale . . . . .	54
5.3	Integrale di Schwarz-Christoffel . . . . .	55
5.3.1	Applicazioni dell'integrale di Schwarz-Christoffel . . .	56
5.3.1.1	Conformal function per il Rombo . . . . .	56
5.3.1.2	Conformal function per il rettangolo . . . . .	59
5.3.1.3	<i>Conformal function</i> per il quadrato . . . . .	61
5.3.2	Calcolo del raggio di curvatura negli angoli di un poligono	63
5.3.3	Integrali di Cauchy . . . . .	64
5.4	Applicazioni . . . . .	67
5.5	Inclusione ellittica . . . . .	67
5.5.1	Inclusione rigida ellittica . . . . .	67
5.5.1.1	Confronto qualitativo tra risultato analitico e numerico . . . . .	71
5.6	Inclusione infinitamente rigida sottile . . . . .	71
5.7	Inclusione quadrata . . . . .	72
5.7.1	Inclusione rigida quadrata . . . . .	72
5.7.1.1	Confronto qualitativo tra risultato analitico e sperimentale . . . . .	78
5.8	Inclusione romboidale . . . . .	78
5.8.1	Inclusione rigida romboidale . . . . .	79
5.8.1.1	Confronto qualitativo tra risultato analitico e sperimentale . . . . .	84
<b>6</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>87</b>

# Capitolo 1

## Introduzione

Oggi giorno elementi strutturali ad elevata prestazione sono realizzati mediante l'impiego di materiali compositi, ottenuti ad esempio introducendo nella matrice una seconda fase soffice, al fine di diminuire il peso proprio, oppure una seconda fase più rigida, al fine di aumentare le caratteristiche di rigidità. Oltre al miglioramento di questi aspetti, la presenza di una seconda fase può comportare concentrazioni di sforzo nei campi meccanici e la possibilità di perdita di adesione tra l'inclusione e la matrice.

Poichè la conoscenza dei campi di tensione e deformazione per questi materiali è di importanza fondamentale al fine di migliorare la progettazione ingegneristica di componenti meccaniche e strutturali in cui sono presenti tali problematiche, in questa tesi si tratterà mediante approccio analitico il problema di un materiale elastico contenente un'inclusione elastica di forma generica. Gli approcci analitici per studiare questo problema si distinguono essenzialmente in due tipi: (i) Equazioni integrali basate sulla funzione di Green e (ii) Metodo dei potenziali complessi. Il metodo impiegato in questa tesi è il secondo poichè risulta essere il più agevole.

Anche se recentemente tali approcci analitici hanno avuto il sopravvento con l'avvenire dei programmi ad elementi finiti, in particolari casi di geometrie (inclusioni con cuspidi) i campi meccanici, caratterizzati da singolarità, difficilmente riescono ad essere predetti mediante simulazioni numeriche poichè quest'ultime richiederebbero un livello di dettaglio molto elevato. Per questi motivi l'approccio analitico investigato risulta essere uno strumento indispensabile per potere predire in maniera dettagliata e corretta i campi meccanici all'interno di questi materiali.

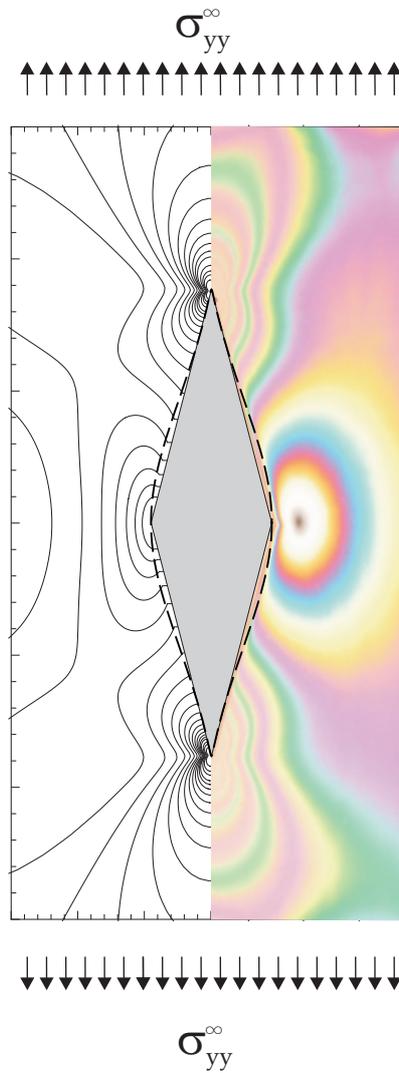


Figura 1.1: Confronto tra la differenza delle tensioni principali analitico e sperimentale con  $\nu=0.48$  in stato piano di deformazione

## Capitolo 2

# Problemi in elasticità piana e funzione di Airy

Si definisce il vettore  $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \{u_x(\mathbf{x}), u_y(\mathbf{x}), u_z(\mathbf{x})\}$  lo spostamento dalla configurazione iniziale alla configurazione finale del generico punto  $\mathbf{x} = \{x, y, z\}$  appartenente al corpo continuo. Questa quantità cinematica è fondamentale per costruire il tensore di deformazione infinitesimo  $\boldsymbol{\varepsilon}$ ,

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad i, j = x, y, z \quad (2.1)$$

Dal punto di vista statico si definisce la quantità tensore di sforzo  $\boldsymbol{\sigma}$ , coniugata al tensore di deformazione  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , che deve soddisfare le equazioni di equilibrio

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0, \quad i, j = x, y, z, \quad (2.2)$$

dove  $\mathbf{b}$  rappresenta la forza di volume, e dalla quale è possibile il vettore tensione  $\mathbf{t}$  per la giacitura definita da una normale  $n$  come

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}. \quad (2.3)$$

La quantità statica  $\boldsymbol{\sigma}$  viene messa in relazione con la quantità cinematica  $\boldsymbol{\varepsilon}$  mediante la definizione di un legame costitutivo. Nel seguito si limiterà lo studio al caso di materiali elastici lineari per i quali il legame costitutivo è definito da

$$\sigma_{ij} = \mathbb{E}_{ijhk}\varepsilon_{hk}, \quad i, j = x, y, z \quad (2.4)$$

ed in particolare al caso di un materiale isotropo per il quale il legame si semplifica nella forma seguente,

$$\sigma_{ij} = \lambda \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}, \quad i, j = x, y, z \quad (2.5)$$

ovvero

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{xx} + \lambda(\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) \\ \sigma_{yy} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{yy} + \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{zz}) \\ \sigma_{zz} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{zz} + \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \\ \sigma_{xy} = 2\mu\varepsilon_{xy} \\ \sigma_{xz} = 2\mu\varepsilon_{xz} \\ \sigma_{yz} = 2\mu\varepsilon_{yz} \end{array} \right. \quad (2.6)$$

dove  $\lambda$  e  $\mu$  sono le costanti di Lamé.

Considerando che il materiale elastico sia definito positivo ( $3\lambda + 2\mu > 0$ ,  $\mu > 0$ ), il legame può essere invertito e descritto nella forma seguente

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] \\ \varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})] \\ \varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] \\ \varepsilon_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{2\mu} \\ \varepsilon_{xz} = \frac{\sigma_{xz}}{2\mu} \\ \varepsilon_{yz} = \frac{\sigma_{yz}}{2\mu} \end{array} \right. \quad (2.7)$$

dove  $E > 0$  è il modulo di Young mentre  $\nu \in (-1, 1/2)$  è il coefficiente di Poisson, costanti elastiche che sono legate alle costanti di Lamé mediante

$$E = \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \mu, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad (2.8)$$

oppure mediante il legame inverso

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (2.9)$$

Infine il legame diretto può essere riscritto in funzione della parte sferica e parte deviatorica della deformazione,

$$\sigma_{ij} = K \text{tr}(\varepsilon) \delta_{ij} + 2\mu \text{dev}(\varepsilon)_{ij}, \quad i, j = x, y, z \quad (2.10)$$

dove si è introdotto il modulo di comprimibilità  $K$ ,

$$K = \lambda + \frac{2}{3}\mu \quad (2.11)$$

## 2.1 Elasticità piana

### 2.1.1 Stato piano di deformazione

Si definisce stato piano di deformazione quando il vettore di spostamento ha componente nulla fuori dal piano mentre le altre componenti sono funzione della sola posizione nel piano,

$$u_i = u_i(x, y), \quad (i = x, y), \quad u_z = 0, \quad (2.12)$$

e pertanto le componenti di deformazioni non nulle sono quelle nel piano

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xx} = u_{x,x} \\ \varepsilon_{yy} = u_{y,y} \\ \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}(u_{y,x} + u_{x,y}) \\ \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0 \end{array} \right. \quad (2.13)$$

In condizioni di deformazione piana il legame costitutivo diretto si semplifica in

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{xx} + \lambda\varepsilon_{yy} \\ \sigma_{yy} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{yy} + \lambda\varepsilon_{xx} \\ \sigma_{zz} = \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \\ \sigma_{xy} = 2\mu\varepsilon_{xy} \\ \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0 \end{array} \right. \quad (2.14)$$

mentre il legame costitutivo inverso diventa

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \bar{\nu}\sigma_{yy}) \\ \varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}(\sigma_{yy} - \bar{\nu}\sigma_{xx}) \\ \varepsilon_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{2\mu} \end{array} \right. \quad (2.15)$$

### 2.1.2 Stato piano di tensione

Si definisce stato piano di tensione quando il tensore di sforzo ha componente nulla fuori dal piano mentre le altri componenti sono funzione della sola posizione nel piano,

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(x, y), \quad (i = x, y), \quad \sigma_{kz} = 0, \quad (k = x, y, z). \quad (2.16)$$

In condizioni di tensione piana il legame costitutivo diretto si semplifica in

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx} = (\tilde{\lambda} + 2\mu)\varepsilon_{xx} + \tilde{\lambda}\varepsilon_{yy} \\ \sigma_{yy} = (\tilde{\lambda} + 2\mu)\varepsilon_{yy} + \tilde{\lambda}\varepsilon_{xx} \\ \sigma_{zz} = 0 \\ \sigma_{xy} = 2\mu\varepsilon_{xy} \\ \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0 \end{array} \right. \quad (2.17)$$

dove si è introdotta la costante di Lamè indebolita

$$\tilde{\lambda} = \frac{2\mu\lambda}{\lambda + 2\mu} \quad (2.18)$$

mentre il legame costitutivo inverso diventa

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} (\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}) \\ \varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} (\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx}) \\ \varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \\ \varepsilon_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{2\mu} \end{array} \right. \quad (2.19)$$

### 2.1.3 Formulazione del problema al contorno per gli stati piani

Osservando il legame elastico inverso valido per le deformazioni nel piano nei due casi di stato piano si nota come formalmente le equazioni risultino le medesime. Per tale motivo è pertanto possibile considerare entrambi i problemi con la stessa formulazione e ricordandosi che le costanti elastiche

$E$  e  $\nu$  siano da considerarsi nella loro versione irrigidita  $\bar{E}$  e  $\bar{\nu}$  quando si considera lo stato piano di deformazione.

Riferendosi alle sole quantità nel piano,

$$\begin{aligned} & \sigma_{xx}(x, y), \sigma_{xy}(x, y), \sigma_{yy}(x, y), \\ & \varepsilon_{xx}(x, y), \varepsilon_{xy}(x, y), \varepsilon_{yy}(x, y), \end{aligned} \quad (2.20)$$

la condizione di compatibilità di Bianchi,

$$\varepsilon_{xx,yy} + \varepsilon_{yy,xx} = 2\varepsilon_{xy,xy}, \quad (2.21)$$

assieme alle equazioni indefinite di equilibrio nel caso di forze di volume nulle,  $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ ,

$$\begin{cases} \sigma_{xx,x} + \sigma_{xy,y} = 0 \\ \sigma_{xy,x} + \sigma_{yy,y} = 0 \end{cases} \quad (2.22)$$

ed al legame costitutivo inverso, porge alla condizione

$$\nabla^2(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 0, \quad (2.23)$$

dalla quale si nota che il campo tensionale in un problema piano con condizioni al contorno nelle tensioni non dipende dalle costanti elastiche. Spesso inoltre ci si riferisce al coefficiente  $\kappa$  nel quale si condensa la distinzione nella tipologia di stato piano

$$\kappa = \begin{cases} 3 - 4\nu, & \text{deformazione piana} \\ \frac{3 - \nu}{1 + \nu} & \text{tensione piana} \end{cases} \quad (2.24)$$

#### 2.1.4 Funzione di Airy

Introducendo la *funzione di Airy*  $\phi(x, y)$ , tale che siano soddisfatte automaticamente le equazioni di equilibrio indefinito (2.22),

$$\sigma_{xx} = \phi_{,yy}, \quad \sigma_{yy} = \phi_{,xx}, \quad \sigma_{xy} = -\phi_{,xy}, \quad (2.25)$$

la (2.23) diventa

$$\nabla^4 \phi(x, y) = 0, \quad (2.26)$$

dalla quale si ha il requisito che la funzione di Airy deve essere *biarmonica*.

In coordinate cartesiane il bilaplaciano significa:

$$\nabla^4 = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) = \left( \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right) \quad (2.27)$$

Considerando un sistema di coordinate polari  $(r, \vartheta)$ , il legame tra i due sistemi di riferimento è:

$$\begin{cases} x = r \cos \vartheta \\ y = r \sin \vartheta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan \vartheta = \frac{y}{x} \end{cases} \quad (2.28)$$

e pertanto le seguenti regole di derivazione

$$\begin{cases} \frac{\partial f(r, \vartheta)}{\partial x} = \cos \vartheta \frac{\partial f(r, \vartheta)}{\partial r} - \frac{\sin \vartheta}{r} \frac{\partial f(r, \vartheta)}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial f(r, \vartheta)}{\partial y} = \sin \vartheta \frac{\partial f(r, \vartheta)}{\partial r} + \frac{\cos \vartheta}{r} \frac{\partial f(r, \vartheta)}{\partial \vartheta} \end{cases} \quad (2.29)$$

Nel sistema di riferimento polare il legame spostamento-deformazione diventa

$$\begin{cases} \varepsilon_{rr} = u_{r,r} \\ \varepsilon_{\vartheta\vartheta} = \frac{u_r + u_{\vartheta,\vartheta}}{r} \\ \varepsilon_{r\vartheta} = \varepsilon_{\vartheta r} = \frac{1}{2} \left( u_{\vartheta,r} + \frac{u_{r,\vartheta} - u_{\vartheta}}{r} \right) \\ \varepsilon_{33} = \varepsilon_{3r} = \varepsilon_{3\vartheta} = \varepsilon_{\vartheta 3} = \varepsilon_{r3} = 0 \end{cases} \quad (2.30)$$

e le equazioni di equilibrio si scrivono,

$$\begin{cases} \sigma_{rr,r} + \frac{\sigma_{r\vartheta,\vartheta} + \sigma_{rr} - \sigma_{\vartheta\vartheta}}{r} = 0 \\ \sigma_{r\vartheta,r} + \frac{2\sigma_{r\vartheta} + \sigma_{\vartheta\vartheta,\vartheta}}{r} = 0 \end{cases} \quad (2.31)$$

mentre il legame costitutivo diretto diventa

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{rr} + \lambda\varepsilon_{\vartheta\vartheta} \\ \sigma_{\vartheta\vartheta} = \lambda\varepsilon_{rr} + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{\vartheta\vartheta} \\ \sigma_{r\vartheta} = 2\mu\varepsilon_{r\vartheta} \end{cases} \quad (2.32)$$

e quello inverso

$$\begin{cases} \varepsilon_{rr} = \frac{1}{E} (\sigma_{rr} - \nu \sigma_{\vartheta\vartheta}) \\ \varepsilon_{\vartheta\vartheta} = \frac{1}{E} (-\nu \sigma_{rr} + \sigma_{\vartheta\vartheta}) \\ \varepsilon_{r\vartheta} = \frac{\sigma_{r\vartheta}}{2\mu} \end{cases} \quad (2.33)$$

dove le costanti elastiche sono da considerarsi nella loro versione irrigidita nel legame inverso se in condizioni di deformazione piana, mentre nella loro versione indebolita nel legame diretto se in condizioni di tensione piana.

Il legame tra le tensioni nel sistema polare e la funzione di Airy  $F(r, \vartheta)$  si esprime come

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \vartheta^2} \\ \sigma_{\vartheta\vartheta} = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} \\ \sigma_{r\vartheta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \vartheta} \right) \end{cases} \quad (2.34)$$

dove l'equazione (2.26) continua a valere con il significato che

$$\nabla^4 = \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} \right) \quad (2.35)$$

La generica funzione di Airy in coordinate polari soluzione dell'equazione (2.26) è definita dalla seguente soluzione (Boresi pag. 465)

$$\begin{aligned}
F(r, \vartheta) = & A_{0,1} \log r + A_{0,2} r^2 + A_{0,3} \vartheta + A_{0,5} r^2 \log r + A_{0,6} r^2 \vartheta + \\
& + A_{1,1} r \vartheta \sin \vartheta + \left( A_{1,2} r^3 + A_{1,3} \frac{1}{r} + A_{1,4} r \log r \right) \cos \vartheta + \\
& + A_{1,5} r \vartheta \cos \vartheta + \left( A_{1,6} r^3 + A_{1,7} \frac{1}{r} + A_{1,8} r \log r \right) \sin \vartheta + \\
& + \sum_{n=2}^{\infty} \left( A_{n,1} r^n + A_{n,2} r^{n+2} + A_{n,3} \frac{1}{r^n} + A_{n,4} \frac{1}{r^{n-2}} \right) \cos n\vartheta + \\
& + \sum_{n=2}^{\infty} \left( A_{n,5} r^n + A_{n,6} r^{n+2} + A_{n,7} \frac{1}{r^n} + A_{n,8} \frac{1}{r^{n-2}} \right) \sin n\vartheta
\end{aligned} \tag{2.36}$$

### Relazioni tra le costanti elastiche

$$\begin{aligned}
K^{3D} = \lambda + \frac{2}{3}\mu = \frac{7 - \kappa}{\kappa - 1} \frac{\mu}{3} > 0 \quad \Rightarrow \quad \kappa = \frac{3K^{3D} + 7\mu}{3K^{3D} + \mu} \\
K^{2D} = \lambda + \mu = \frac{2\mu}{\kappa - 1} > 0 \quad \Rightarrow \quad \kappa = \frac{K^{2D} + 2\mu}{K^{2D}}
\end{aligned} \tag{2.37}$$

## 2.2 Lastra omogenea soggetta a tensione biassiale costante all'infinito

Si consideri un sistema di riferimento cartesiano parallelo e ortogonale alle direzioni principali di tensione all'infinito e con tensioni principali  $\sigma_{xx}^{\infty}$  e  $\sigma_{yy}^{\infty}$  rispettivamente in direzione  $x$  e  $y$ . In questo sistema il tensore di tensione all'infinito è:

$$\boldsymbol{\sigma}^{\infty} = \begin{bmatrix} p^{\infty} + q^{\infty} & 0 \\ 0 & p^{\infty} - q^{\infty} \end{bmatrix} \tag{2.38}$$

dove

$$p^{\infty} = \frac{\sigma_{xx}^{\infty} + \sigma_{yy}^{\infty}}{2} \quad q^{\infty} = \frac{\sigma_{xx}^{\infty} - \sigma_{yy}^{\infty}}{2} \tag{2.39}$$

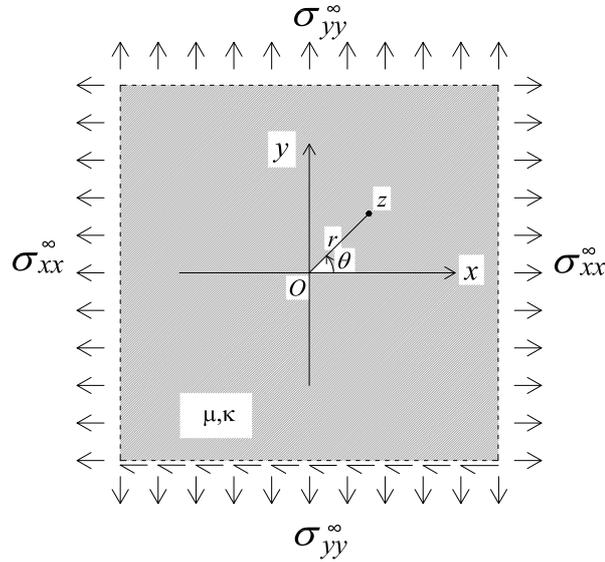


Figura 2.1: Lastra omogenea soggetta a tensione biassiale costante all'infinito

mentre nel sistema di riferimento polare, utilizzando le regole di trasformazione dei tensori, il tensore di tensione risulta:

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\sigma}^\infty &= \begin{bmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p^\infty + q^\infty & 0 \\ 0 & p^\infty - q^\infty \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} p^\infty + q^\infty \cos 2\vartheta & -q^\infty \sin 2\vartheta \\ -q^\infty \sin 2\vartheta & p^\infty - q^\infty \cos 2\vartheta \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.40}$$

Essendo la lastra omogenea il campo risulta costante ovvero pari alle quantità all'infinito:

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\sigma}^\infty \tag{2.41}$$

Mediante il legame costitutivo inverso si ottengono le componenti di deformazioni in coordinate polari

$$\begin{cases} \varepsilon_{rr} = \frac{\lambda + 2\mu}{4\mu(\lambda + \mu)}(p^\infty + q^\infty \cos 2\vartheta) - \frac{\lambda}{4\mu(\lambda + \mu)}(p^\infty - q^\infty \cos 2\vartheta) \\ \varepsilon_{\vartheta\vartheta} = \frac{\lambda + 2\mu}{4\mu(\lambda + \mu)}(p^\infty - q^\infty \cos 2\vartheta) - \frac{\lambda}{4\mu(\lambda + \mu)}(p^\infty + q^\infty \cos 2\vartheta) \\ \varepsilon_{r\vartheta} = -\frac{1}{2\mu}q^\infty \sin 2\vartheta \end{cases} \quad (2.42)$$

da cui per integrazione:

$$\begin{cases} u_r(r, \vartheta) = \int \varepsilon_{rr} dr = \left( \frac{p^\infty}{2(\lambda + \mu)} + \frac{q^\infty \cos 2\vartheta}{2\mu} \right) r + f(\vartheta) \\ u_\vartheta(r, \vartheta) = \int (r\varepsilon_{\vartheta\vartheta} - u_r) d\vartheta = -\frac{q^\infty \sin 2\vartheta}{2\mu} r + g(r) \end{cases} \quad (2.43)$$

dove  $f(\vartheta) = g(r) = 0$  per la definizione della deformazione tangenziale, pertanto

$$\begin{cases} u_r(r, \vartheta) = \left( \frac{p^\infty}{2(\lambda + \mu)} + \frac{q^\infty \cos 2\vartheta}{2\mu} \right) r \\ u_\vartheta(r, \vartheta) = -\frac{q^\infty \sin 2\vartheta}{2\mu} r \end{cases} \quad (2.44)$$

## 2.3 Lastra contenente un'inclusione circolare e soggetta a tensione biassiale costante all'infinito

### 2.3.1 Stato di tensione all'infinito costante

Le funzioni di Airy che caratterizzano gli stati all'interno dei differenti materiali assumono la forma

- Materiale 1 (inclusione circolare  $r < R_1$ );

$$F_1(r, \vartheta) = A_1 R_1^2 \log r + A_2 r^2 + \left( A_3 R_1^2 + A_4 r^2 + A_5 R_1^4 \frac{1}{r^2} + A_6 \frac{1}{R_1^2} r^4 \right) \cos 2\vartheta \quad (2.45)$$

- Materiale 2 (matrice  $r > R_1$ );

$$F_2(r, \vartheta) = B_1 R_1^2 \log r + B_2 r^2 + \left( B_3 R_1^2 + B_4 r^2 + B_5 R_1^4 \frac{1}{r^2} + B_6 \frac{1}{R_1^2} r^4 \right) \cos 2\vartheta \quad (2.46)$$

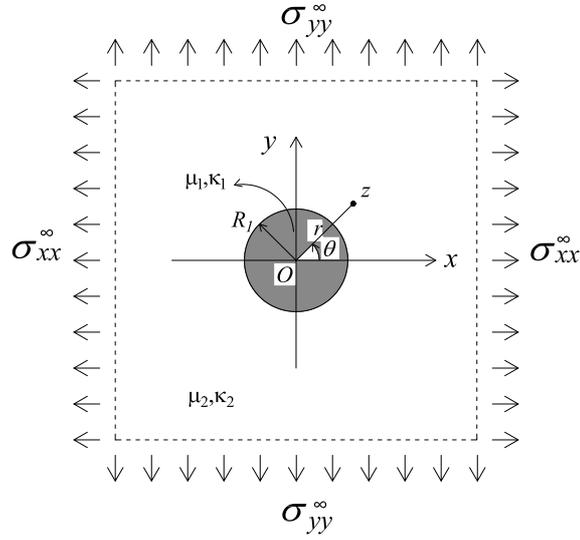


Figura 2.2: Lastra omogenea contenente un'inclusione circolare e soggetta a tensione biassiale costante all'infinito

I coefficienti  $A_i$  e  $B_i$  ( $i = 1, \dots, 8$ ) si stabiliscono con le condizioni di continuità e le condizioni all'infinito.

Affinchè i campi siano non abbiano singolarità all'infinito o all'origine, a priori si conclude che

$$A_1 = A_3 = A_5 = B_6 = 0 \quad (2.47)$$

Dalle condizioni all'infinito si fissano le due costanti:

$$B_2 = \frac{p^\infty}{2} \quad B_4 = -\frac{q^\infty}{2} \quad (2.48)$$

La continuità all'interfaccia implica:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{rr}^{(1)}(R_1, \vartheta) = \sigma_{rr}^{(2)}(R_1, \vartheta) \\ \sigma_{r\vartheta}^{(1)}(R_1, \vartheta) = \sigma_{r\vartheta}^{(2)}(R_1, \vartheta) \\ u_r^{(1)}(R_1, \vartheta) = u_r^{(2)}(R_1, \vartheta) \\ u_\vartheta^{(1)}(R_1, \vartheta) = u_\vartheta^{(2)}(R_1, \vartheta) \end{array} \right. \quad (2.49)$$

Si ottiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_2 = \frac{(\lambda_1 + \mu_1)(\lambda_2 + 2\mu_2)}{2(\lambda_2 + \mu_2)(\lambda_1 + \mu_1 + \mu_2)} p^\infty \\ A_4 = -\frac{\mu_1(\lambda_2 + 2\mu_2)}{\lambda_2(\mu_1 + \mu_2) + \mu_2(3\mu_1 + \mu_2)} q^\infty \\ A_6 = 0 \\ B_1 = \frac{\mu_2(\lambda_1 - \lambda_2 + \mu_1 - \mu_2)}{(\lambda_2 + \mu_2)(\lambda_1 + \mu_1 + \mu_2)} p^\infty \\ B_3 = -\frac{(\mu_1 - \mu_2)(\lambda_2 + \mu_2)}{\lambda_2(\mu_1 + \mu_2) + \mu_2(3\mu_1 + \mu_2)} q^\infty \\ B_5 = \frac{(\mu_1 - \mu_2)(\lambda_2 + \mu_2)}{2(\lambda_2(\mu_1 + \mu_2) + \mu_2(3\mu_1 + \mu_2))} q^\infty \end{array} \right. \quad (2.50)$$

Per l'inclusione, materiale (1), i campi risultano:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{rr}^{(1)}(\vartheta) = \frac{(\lambda_1 + \mu_1)(\lambda_2 + 2\mu_2)}{(\lambda_2 + \mu_2)(\lambda_1 + \mu_1 + \mu_2)} p^\infty + \frac{2\mu_1(\lambda_2 + 2\mu_2) \cos 2\vartheta}{\lambda_2(\mu_1 + \mu_2) + \mu_2(3\mu_1 + \mu_2)} q^\infty \\ \sigma_{\vartheta\vartheta}^{(1)}(\vartheta) = \frac{(\lambda_1 + \mu_1)(\lambda_2 + 2\mu_2)}{(\lambda_2 + \mu_2)(\lambda_1 + \mu_1 + \mu_2)} p^\infty - \frac{2\mu_1(\lambda_2 + 2\mu_2) \cos 2\vartheta}{\lambda_2(\mu_1 + \mu_2) + \mu_2(3\mu_1 + \mu_2)} q^\infty \\ \sigma_{r\vartheta}^{(1)}(\vartheta) = -\frac{2\mu_1(\lambda_2 + 2\mu_2) \sin 2\vartheta}{\lambda_2(\mu_1 + \mu_2) + \mu_2(3\mu_1 + \mu_2)} q^\infty \\ u_r^{(1)}(r, \vartheta) = \left[ \frac{\lambda_2 + 2\mu_2}{2(\lambda_2 + \mu_2)(\lambda_1 + \mu_1 + \mu_2)} p^\infty + \frac{(\lambda_2 + 2\mu_2) \cos 2\vartheta}{\lambda_2(\mu_1 + \mu_2) + \mu_2(3\mu_1 + \mu_2)} q^\infty \right] r \\ u_\vartheta^{(1)}(r, \vartheta) = -\frac{(\lambda_2 + 2\mu_2) \sin 2\vartheta}{\lambda_2(\mu_1 + \mu_2) + \mu_2(3\mu_1 + \mu_2)} q^\infty r \end{array} \right. \quad (2.51)$$

dove si può osservare che le tensioni non sono influenzate dalla coordinata radiale, mentre nella matrice, materiale (2), i campi risultano:

$$\left\{ \begin{array}{l}
\sigma_{rr}^{(2)}(r, \vartheta) = \left[ 1 + \frac{\mu_2(\lambda_1 - \lambda_2 + \mu_1 - \mu_2)}{(\lambda_2 + \mu_2)(\lambda_1 + \mu_1 + \mu_2)} \frac{R_1^2}{r^2} \right] p^\infty + \\
+ \left[ 1 - \frac{(\mu_1 - \mu_2)(\lambda_2 + \mu_2)}{\lambda_2(\mu_1 + \mu_2) + \mu_2(3\mu_1 + \mu_2)} \left( \frac{3R_1^4}{r^4} - \frac{4R_1^2}{r^2} \right) \right] q^\infty \cos 2\vartheta \\
\sigma_{\vartheta\vartheta}^{(2)}(r, \vartheta) = \left[ 1 - \frac{\mu_2(\lambda_1 - \lambda_2 + \mu_1 - \mu_2)}{(\lambda_2 + \mu_2)(\lambda_1 + \mu_1 + \mu_2)} \frac{R_1^2}{r^2} \right] p^\infty + \\
- \left[ 1 - \frac{(\mu_1 - \mu_2)(\lambda_2 + \mu_2)}{\lambda_2(\mu_1 + \mu_2) + \mu_2(3\mu_1 + \mu_2)} \frac{3R_1^4}{r^4} \right] q^\infty \cos 2\vartheta \\
\sigma_{r\vartheta}^{(2)}(r, \vartheta) = - \left[ 1 - \frac{(\mu_1 - \mu_2)(\lambda_2 + \mu_2)}{\lambda_2(\mu_1 + \mu_2) + \mu_2(3\mu_1 + \mu_2)} \left( \frac{2R_1^2}{r^2} - \frac{3R_1^4}{r^4} \right) \right] q^\infty \sin 2\vartheta \\
u_r^{(2)}(r, \vartheta) = \frac{1}{2(\lambda_2 + \mu_2)} \left[ r - \frac{\lambda_1 - \lambda_2 + \mu_1 - \mu_2}{\lambda_1 + \mu_1 + \mu_2} \frac{R_1^2}{r} \right] p^\infty + \\
+ \frac{1}{2\mu_2} \left[ r - \frac{2(\mu_1 - \mu_2)(\lambda_2 + 2\mu_2)}{\lambda_2(\mu_1 + \mu_2) + \mu_2(3\mu_1 + \mu_2)} \frac{R_1^2}{r} + \right. \\
+ \left. \frac{(\mu_1 - \mu_2)(\lambda_2 + \mu_2)}{\lambda_2(\mu_1 + \mu_2) + \mu_2(3\mu_1 + \mu_2)} \frac{R_1^4}{r^3} \right] q^\infty \cos 2\vartheta \\
u_\vartheta^{(2)}(r, \vartheta) = \left[ -\frac{r}{2\mu_2} + \frac{R_1^2(\mu_1 - \mu_2)}{\lambda_2(\mu_1 + \mu_2) + \mu_2(3\mu_1 + \mu_2)} \right. \\
\left. \times \left( \frac{1}{r} + \frac{\lambda_2 + \mu_2}{2\mu_2} \frac{R_1^2}{r^3} \right) \right] q^\infty \sin 2\vartheta
\end{array} \right. \quad (2.52)$$

Si osserva che nel caso in cui  $\mu_1 = \mu_2$  e  $\lambda_1 = \lambda_2$ , e similmente se  $R_1 \rightarrow 0$ , la soluzione ottenuta restituisce la soluzione del caso lastra omogenea. Inoltre nel caso di  $(\mu_1, \lambda_1) \rightarrow 0$  si ha la soluzione per il foro (Kirsch) mentre per  $(\mu_1, \lambda_1) \rightarrow \infty$  si ha la soluzione per il nucleo rigido.

**Foro circolare (soluzione di Kirsch)** Per  $(\mu_1, \lambda_1) \rightarrow 0$  l'inclusione diventa un vuoto. Si hanno i campi ottenuti da Kirsch (1898) validi per i punti per cui  $r \geq R_1$  :

$$\left\{ \begin{array}{l}
\sigma_{rr}(r, \vartheta) = p^\infty \left( 1 - \frac{R_1^2}{r^2} \right) + q^\infty \left( 1 + \frac{3R_1^4}{r^4} - \frac{4R_1^2}{r^2} \right) \cos 2\vartheta \\
\sigma_{\vartheta\vartheta}(r, \vartheta) = p^\infty \left( 1 + \frac{R_1^2}{r^2} \right) - q^\infty \left( 1 + \frac{3R_1^4}{r^4} \right) \cos 2\vartheta \\
\sigma_{r\vartheta}(r, \vartheta) = -q^\infty \left( 1 + \frac{2R_1^2}{r^2} - \frac{3R_1^4}{r^4} \right) \sin 2\vartheta \\
u_r(r, \vartheta) = \frac{p^\infty}{2(\lambda_2 + \mu_2)} \left( r + \frac{\lambda_2 + \mu_2}{\mu_2} \frac{R_1^2}{r} \right) + \frac{q^\infty}{2\mu_2} \left( r + \frac{\lambda_2 + 2\mu_2}{\lambda_2 + \mu_2} \frac{2R_1^2}{r} - \frac{R_1^4}{r^3} \right) \cos 2\vartheta \\
u_\vartheta(r, \vartheta) = -\frac{q^\infty}{2\mu_2} \left( r + \frac{\mu_2}{\lambda_2 + \mu_2} \frac{2R_1^2}{r} + \frac{R_1^4}{r^3} \right) \sin 2\vartheta
\end{array} \right. \quad (2.53)$$

Per i campi si verificano le condizioni al contorno:

$$\sigma_{rr}(R_1, \vartheta) = \sigma_{r\vartheta}(R_1, \vartheta) = 0 \quad (2.54)$$

**Inclusione circolare rigida** Per  $(\mu_1, \lambda_1) \rightarrow \infty$  l'inclusione diventa un nucleo rigido. Si hanno i campi validi per i punti per cui  $r \geq R_1$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{rr}(r, \vartheta) = p^\infty \left( 1 + \frac{\mu_2}{\lambda_2 + \mu_2} \frac{R_1^2}{r^2} \right) + q^\infty \left[ 1 - \frac{\lambda_2 + \mu_2}{\lambda_2 + 3\mu_2} \left( \frac{3R_1^4}{r^4} - \frac{4R_1^2}{r^2} \right) \right] \cos 2\vartheta \\ \sigma_{\vartheta\vartheta}(r, \vartheta) = p^\infty \left( 1 - \frac{\mu_2}{\lambda_2 + \mu_2} \frac{R_1^2}{r^2} \right) - q^\infty \left( 1 - \frac{\lambda_2 + \mu_2}{\lambda_2 + 3\mu_2} \frac{3R_1^4}{r^4} \right) \cos 2\vartheta \\ \sigma_{r\vartheta}(r, \vartheta) = -q^\infty \left[ 1 - \frac{\lambda_2 + \mu_2}{\lambda_2 + 3\mu_2} \left( \frac{2R_1^2}{r^2} - \frac{3R_1^4}{r^4} \right) \right] \sin 2\vartheta \\ u_r(r, \vartheta) = \frac{p^\infty}{2(\lambda_2 + \mu_2)} \left( r - \frac{R_1^2}{r} \right) + \frac{q^\infty}{2\mu_2} \left[ r - \frac{2(\lambda_2 + 2\mu_2)R_1^2}{\lambda_2 + 3\mu_2} \left( \frac{1}{r} - \frac{\lambda_2 + \mu_2}{\lambda_2 + 2\mu_2} \frac{R_1^2}{r^3} \right) \right] \cos 2\vartheta \\ u_\vartheta(r, \vartheta) = q^\infty \left[ -\frac{r}{2\mu_2} + \frac{R_1^2}{\lambda_2 + 3\mu_2} \left( \frac{1}{r} + \frac{\lambda_2 + \mu_2}{2\mu_2} \frac{R_1^2}{r^3} \right) \right] \sin 2\vartheta \end{array} \right. \quad (2.55)$$

Si nota come ora anche i campi tensionali siano influenzati dalle costanti elastiche, questo accade poichè le condizioni per  $r = R_1$  sono definite sugli spostamenti.

Per i campi si verificano le condizioni al contorno:

$$u_r(R_1, \vartheta) = u_\vartheta(R_1, \vartheta) = 0 \quad (2.56)$$

Considerando  $\sigma_{yy}^\infty = 0$  le tensioni radiali e circonferenziali massime/minime all'interfaccia,  $r = R_1$ , si sviluppano per  $\vartheta = \{0; \pi/2\}$  e valgono

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{rr}(R_1, 0) \\ \sigma_{\vartheta\vartheta}(R_1, 0) \\ \sigma_{rr}(R_1, \pi/2) \\ \sigma_{\vartheta\vartheta}(R_1, \pi/2) \end{array} \right\} = \frac{2\sigma_{xx}^\infty}{3\kappa^2 + 2\kappa - 1} \left\{ \begin{array}{l} \kappa(1 + 5\kappa) \\ 1 + 5\kappa \\ \kappa(\kappa - 3) \\ \kappa - 3 \end{array} \right\} \quad (2.57)$$

Il fattore di concentrazione di sforzi in questo caso dipende dalle caratteristiche del materiale,  $\nu$ , e si riporta in Fig. 2.3 per il caso di deformazione piana. Infine in Fig. 2.4 si riporta il grafico a curve di livello della differenza di tensioni principali nel piano ottenuto dalla soluzione analitica nel caso di deformazione piana considerando  $\nu = 0.48$  e il confronto con la stessa quantità rilevata con indagine fotoelastica.

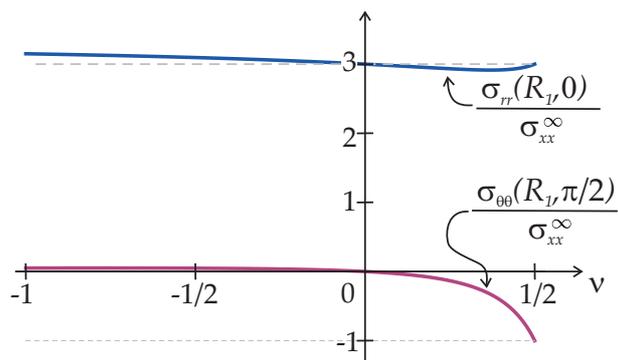


Figura 2.3: Intensificazione dello sforzo in prossimità dell'inclusione rigida per  $\vartheta = \{0; \pi/2\}$  nel caso di deformazione piana al variare del coefficiente di Poisson,  $\nu$

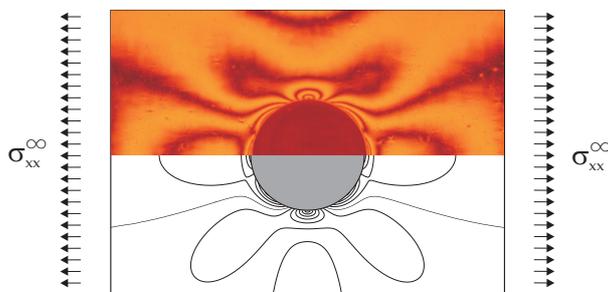


Figura 2.4: Differenza di tensioni principali. Confronto tra indagine sperimentale fotoelastica e soluzione analitica nel caso di deformazione piana considerando  $\nu = 0.48$

## 2.4 Singolarità tensionale in presenza di vuoti o inclusioni rigide a cuspidate

Riferendosi ad un sistema di coordinate polari  $(r, \vartheta)$  centrato al vertice di una inclusione a cuspidate (fig. 2.5), si può considerare la seguente espansione della funzione di Airy

$$F(r, \vartheta) = r^\gamma [A_1 \cos \gamma \vartheta + A_2 \sin \gamma \vartheta + A_3 \cos(\gamma - 2)\vartheta + A_4 \sin(\gamma - 2)\vartheta], \quad (2.58)$$

dove  $\gamma$  e  $A_j$  ( $j=1,2,3,4$ ) sono costanti reali che si ottengono imponendo le condizioni al contorno e le condizioni di simmetria.

I campi tensionali e di spostamento si possono ottenere da  $F(r, \vartheta)$  per

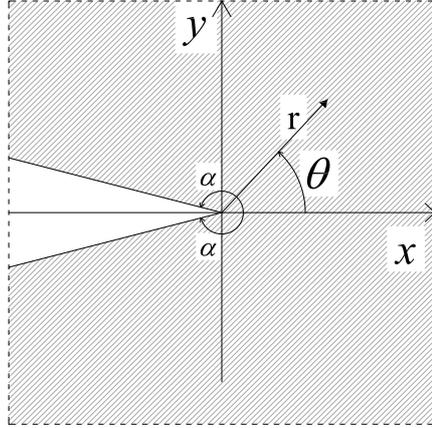


Figura 2.5: Sistemi di riferimento utilizzati nell'analisi dei campi asintotici in presenza di inclusioni a cuspidale

diretta derivazione e risultano

$$\begin{aligned}
u_r &= -\frac{r^{\gamma-1}}{2\mu} [A_1\gamma \cos \gamma\vartheta + A_2\gamma \sin \gamma\vartheta \\
&\quad - A_3(\kappa + 1 - \gamma) \cos(\gamma - 2)\vartheta - A_4(\kappa + 1 - \gamma) \sin(\gamma - 2)\vartheta], \\
u_\vartheta &= \frac{r^{\gamma-1}}{2\mu} [A_1\gamma \sin \gamma\vartheta - A_2\gamma \cos \gamma\vartheta \\
&\quad + A_3(\kappa - 1 + \gamma) \sin(\gamma - 2)\vartheta - A_4(\kappa - 1 + \gamma) \cos(\gamma - 2)\vartheta], \\
\sigma_{rr} &= -(\gamma - 1)r^{\gamma-2} [A_1\gamma \cos \gamma\vartheta + A_2\gamma \sin \gamma\vartheta \\
&\quad + A_3(\gamma - 4) \cos(\gamma - 2)\vartheta + A_4(\gamma - 4) \sin(\gamma - 2)\vartheta], \\
\sigma_{\vartheta\vartheta} &= \gamma(\gamma - 1)r^{\gamma-2} [A_1 \cos \gamma\vartheta + A_2 \sin \gamma\vartheta \\
&\quad + A_3 \cos(\gamma - 2)\vartheta + A_4 \sin(\gamma - 2)\vartheta], \\
\sigma_{r\vartheta} &= (\gamma - 1)r^{\gamma-2} [A_1\gamma \sin \gamma\vartheta - A_2\gamma \cos \gamma\vartheta \\
&\quad + A_3(\gamma - 2) \sin(\gamma - 2)\vartheta - A_4(\gamma - 2) \cos(\gamma - 2)\vartheta],
\end{aligned} \tag{2.59}$$

Il campo di spostamenti  $\mathbf{u}(r, \vartheta)$  può essere descritto in componenti cartesiane  $(x, y)$  tramite le relazioni inverse che legano i due sistemi di riferimento,

$$\begin{aligned} u_x(r, \vartheta) &= u_r(r, \vartheta) \cos \vartheta - u_\vartheta(r, \vartheta) \sin \vartheta, \\ u_y(r, \vartheta) &= u_r(r, \vartheta) \sin \vartheta + u_\vartheta(r, \vartheta) \cos \vartheta, \end{aligned} \quad (2.60)$$

e si ottiene

$$\begin{aligned} u_x(r, \vartheta) &= \frac{r^{\gamma-1}}{2\mu} \{ -A_1 \gamma (\cos \vartheta \cos \gamma \vartheta + \sin \vartheta \sin \gamma \vartheta) \\ &\quad - A_2 \gamma (\cos \vartheta \sin \gamma \vartheta - \sin \vartheta \cos \gamma \vartheta) \\ &\quad + A_3 [(\kappa + 1 - \gamma) \cos \vartheta \cos(\gamma - 2)\vartheta \\ &\quad - (\kappa - 1 + \gamma) \sin \vartheta \sin(\gamma - 2)\vartheta] \\ &\quad + A_4 [(\kappa + 1 - \gamma) \cos \vartheta \sin(\gamma - 2)\vartheta \\ &\quad + (\kappa - 1 + \gamma) \sin \vartheta \cos(\gamma - 2)\vartheta] \}, \\ u_y(r, \vartheta) &= \frac{r^{\gamma-1}}{2\mu} \{ -A_1 \gamma (\sin \vartheta \cos \gamma \vartheta - \cos \vartheta \sin \gamma \vartheta) \\ &\quad - A_2 \gamma (\cos \vartheta \cos \gamma \vartheta + \sin \vartheta \sin \gamma \vartheta) \\ &\quad + A_3 [(\kappa + 1 - \gamma) \sin \vartheta \cos(\gamma - 2)\vartheta \\ &\quad + (\kappa - 1 + \gamma) \cos \vartheta \sin(\gamma - 2)\vartheta] \\ &\quad + A_4 [(\kappa + 1 - \gamma) \sin \vartheta \sin(\gamma - 2)\vartheta \\ &\quad - (\kappa - 1 + \gamma) \cos \vartheta \cos(\gamma - 2)\vartheta] \}. \end{aligned} \quad (2.61)$$

#### 2.4.1 Singolarità ammissibili

Si definiscono singolarità ammissibili quelle che soddisfano il criterio per cui l'energia di deformazione in una piccola regione nell'intorno del punto singolare svanisce quando la regione tende a zero.

Considerando una singolarità tensionale, e quindi anche di deformazione, di ordine

$$\sigma \sim \varepsilon \sim r^{\gamma-2}, \quad (2.62)$$

escludendo forze concentrate, in un problema piano, l'energia di deformazione per una regione circolare attorno al punto singolare è del tipo

$$U = \int_0^{2\pi} \int_0^r \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} r dr d\vartheta = C \int_0^r r^{2\gamma-3} dr, \quad (2.63)$$

dove  $C$  è una costante che dipende dalle costanti elastiche e dalle variazioni angolari dei campi.

La singolarità è definita ammissibile se

$$\lim_{r \rightarrow 0} U = 0, \quad (2.64)$$

e pertanto, se e solo se

$$2\gamma - 2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma > 1. \quad (2.65)$$

### 2.4.2 Condizioni di simmetria

In caso di simmetria geometrica, la simmetria nelle condizioni di carico all'infinito implica delle condizioni di simmetria nel campo di spostamenti:

- Modo I (fig. 2.6)

$$u_x(r, \vartheta) = u_x(r, -\vartheta), \quad u_y(r, \vartheta) = -u_y(r, -\vartheta); \quad (2.66)$$

Queste condizioni di simmetria definiscono che

$$A_2 = A_4 = 0 \quad (2.67)$$

- Modo II (fig. 2.7)

$$u_x(r, \vartheta) = -u_x(r, -\vartheta), \quad u_y(r, \vartheta) = u_y(r, -\vartheta). \quad (2.68)$$

Queste condizioni di simmetria definiscono che

$$A_1 = A_3 = 0 \quad (2.69)$$

### 2.4.3 Condizioni al contorno e singolarità possibili

La presenza di un vuoto o di una inclusione rigida in una matrice elastica definisce all'interfaccia ( $\vartheta = \pm\alpha$ ) delle condizioni al contorno.

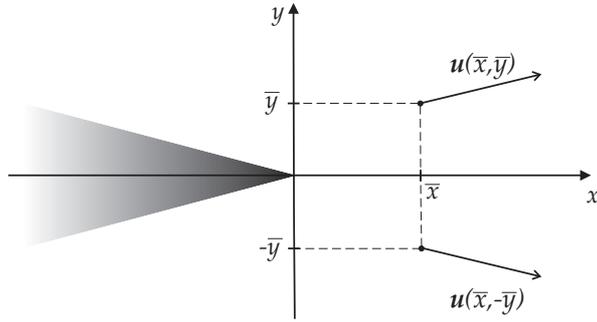


Figura 2.6: Condizioni di simmetria dovute dalla simmetria di Modo I del carico all'infinito

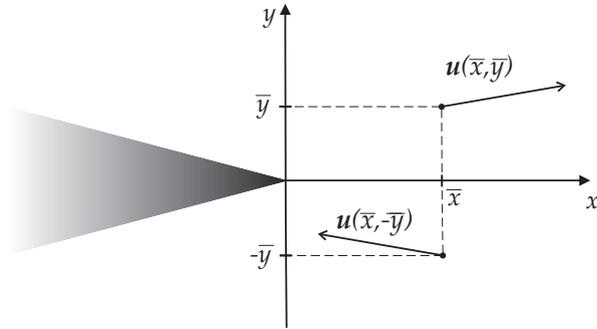


Figura 2.7: Condizioni di simmetria dovute dalla simmetria di Modo II del carico all'infinito

**Caso vuoto.** Nel caso di un vuoto le condizioni al contorno sono espresse in termini di tensione

$$\sigma_{r\vartheta}(r, \pm\alpha) = 0, \quad \sigma_{\vartheta\vartheta}(r, \pm\alpha) = 0, \quad (2.70)$$

Queste condizioni al contorno implicano il seguente sistema omogeneo

$$\begin{cases} A_1\gamma \sin(\alpha\gamma) + A_3(\gamma - 2) \sin(\alpha(\gamma - 2)) = 0 \\ A_1\gamma \cos(\alpha\gamma) + A_3\gamma \cos(\alpha(\gamma - 2)) = 0 \\ A_2\gamma \cos(\alpha\gamma) + A_4(\gamma - 2) \cos(\alpha(\gamma - 2)) = 0 \\ A_2\gamma \sin(\alpha\gamma) + A_4\gamma \sin(\alpha(\gamma - 2)) = 0 \end{cases} \quad (2.71)$$

che nel caso di simmetria Modo I ha soluzioni non banali per  $A_1, A_3$  quando

$$(\gamma - 1) \sin(2\alpha) + \sin(2\alpha(\gamma - 1)) = 0 \quad (2.72)$$

mentre nel caso di simmetria Modo II ha soluzioni non banali per  $A_2, A_4$  quando

$$(\gamma - 1) \sin(2\alpha) - \sin(2\alpha(\gamma - 1)) = 0 \quad (2.73)$$

Le equazioni (2.72)-(2.73) indicano la singolarità possibile in condizioni di simmetria di carico e la loro soluzione è riportata in Fig. 2.8, sinistra.

**Caso rigido.** Nel caso di inclusione rigida le condizioni al contorno sono espresse in termini di spostamenti

$$u_r(r, \pm\alpha) = 0, \quad u_\theta(r, \pm\alpha) = 0, \quad (2.74)$$

Queste condizioni al contorno implicano il seguente sistema omogeneo

$$\begin{cases} A_1\gamma \cos(\alpha\gamma) - A_3(\kappa + 1 - \gamma) \cos(\alpha(\gamma - 2)) = 0 \\ A_1\gamma \sin(\alpha\gamma) + A_3(\kappa - 1 + \gamma) \sin(\alpha(\gamma - 2)) = 0 \\ A_2\gamma \sin(\alpha\gamma) - A_4(\kappa + 1 - \gamma) \sin(\alpha(\gamma - 2)) = 0 \\ A_2\gamma \cos(\alpha\gamma) + A_4(\kappa - 1 + \gamma) \cos(\alpha(\gamma - 2)) = 0 \end{cases} \quad (2.75)$$

che nel caso di simmetria Modo I ha soluzioni non banali per  $A_1, A_3$  quando

$$(\gamma - 1) \sin(2\alpha) - \kappa \sin(2\alpha(\gamma - 1)) = 0 \quad (2.76)$$

mentre nel caso di simmetria Modo II ha soluzioni non banali per  $A_2, A_4$  quando

$$(\gamma - 1) \sin(2\alpha) + \kappa \sin(2\alpha(\gamma - 1)) = 0 \quad (2.77)$$

Le equazioni (2.76)-(2.77) indicano la singolarità possibile in condizioni di simmetria di carico e la loro soluzione è riportata in Fig. 2.8, destra. Si osserva come per entrambi i modi di carico la singolarità sia dipendente dal rapporto di Poissono,  $\nu$ , ed inoltre che la singolarità più forte è quella associata al Modo II, diversamente da quanto accade nel caso del vuoto. In particolare, per matrici vicine all'incomprimibilità il Modo I introduce una singolarità trascurabile per  $\alpha < 3\pi/4$ . Infine si riportano le mappe di livello della differenza nelle tensioni principali ottenuta mediante i campi asintotici in Fig. 2.9.

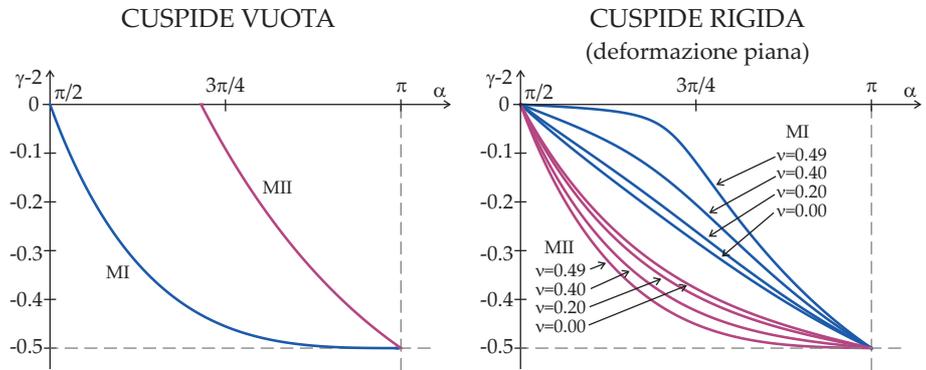


Figura 2.8: Singolarità emergenti all'estremità di cuspidi vuote (sinistra) e rigide (destra, in condizioni di deformazione piana) al variare dell'angolo che definisce l'apertura della cuspidi  $\alpha$  e delle simmetrie di carico, Modo I o Modo II

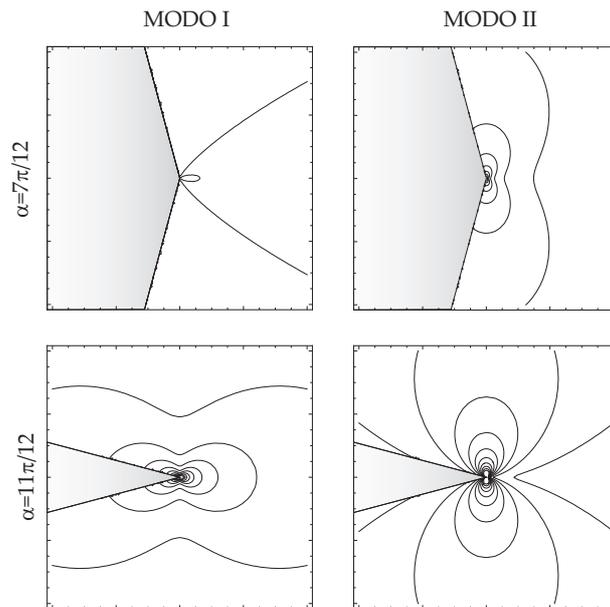


Figura 2.9: Mappa di livello della differenza nelle tensioni principali in prossimità del vertice dell'inclusione a cuspidi originata per condizioni di carico Modo I (sinistra) e Modo II (destra) per  $\alpha = \{7; 11\} \pi/12$  in condizioni di deformazione piana e  $\nu = 0.45$ .

## Capitolo 3

# Funzioni di Green e equazioni integrali

Si considera un corpo piano infinito soggetto a un sistema statico di forze e si fissa un sistema di riferimento cartesiano orientato parallelamente agli assi principali di stress. Si immagina che il sistema di forze sia costituito da una singola forza concentrata applicata nel punto  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  del corpo. Si esprime la forza concentrata come

$$\mathbf{f} = f_i \delta(\mathbf{x}) \mathbf{e}_i \quad (3.1)$$

dove  $\delta(\mathbf{x})$  è la funzione delta di Dirac in due dimensioni e  $\mathbf{x}$  descrive il generico punto materiale.

Si fa riferimento al caso di elasticità comprimibile e isotropa, per la quale le equazioni di equilibrio più generali sono:

$$\mathbb{E}_{ijkl} u_{k,l} + f_j \delta(\mathbf{x}) = 0 \quad (3.2)$$

dove  $\mathbb{E}$  è il tensore elastico, mentre  $u_{k,l}$  è il gradiente del campo di spostamento ed è anche l'incognita del problema. Riscrivendo quest'ultimo in funzione di due potenziali (uno scalare  $\phi$  e uno vettoriale  $\mathbf{A}$ )

$$\mathbf{u} = \nabla \phi + \nabla \times \mathbf{A} \quad (3.3)$$

è possibile riscrivere il set di equazioni dato dalla (3.2) come

$$(\lambda + 2\mu) \nabla^2 (\nabla \phi)_i + \mu \nabla^2 (\nabla \times \mathbf{A})_i + f_i = 0 \quad (3.4)$$

espressione valida per la componente  $i$ -esima, in cui  $\lambda$  e  $\mu$  sono le costanti di Lamè. Dal confronto con l'equazione che governa il problema dell'elettrostatica, ovvero

$$\nabla^4 |\mathbf{r}| = -8\pi \delta(\mathbf{r}) \quad (3.5)$$

si ottengono i valori dei potenziali  $\phi$  e  $\mathbf{A}$  che mostrano l'analogia tra le (3.4) e (3.5). Ponendo unitaria l'intensità della forza agente e una volta trovati  $\phi$  e  $\mathbf{A}$ , è possibile esplicitare la (3.3) e ottenere in questo modo la soluzione per il campo di spostamento:

$$u_j^g(\mathbf{r}) = \frac{1}{8\pi\mu} \left[ \delta_{gj} \nabla^2 \mathbf{r} - \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial x_g \partial x_j} \right] \quad (3.6)$$

dove  $\mathbf{r}$  rappresenta la distanza tra il punto di applicazione della forza concentrata  $\mathbf{x}$  e il punto di osservazione  $\mathbf{y}$ . Si può notare che vale la seguente relazione di simmetria:

$$u_j^g(\mathbf{r}) = u_g^j(\mathbf{r}) \quad (3.7)$$

La soluzione  $u_j^g(\mathbf{r})$  è chiamata tensore della funzione di Green per gli spostamenti elastici; esso fornisce la risposta in un punto  $\mathbf{y}$  in direzione  $g$  di un corpo infinito soggetto a una forza unitaria concentrata applicata in un punto  $\mathbf{x}$  in direzione  $j$ .

### 3.1 Problema dell'inclusione

Le funzioni di Green definite nel paragrafo precedente consentono di utilizzare un approccio di tipo perturbativo al problema dell'inclusione in un mezzo elastico. Si considera una regione piana  $D$  costituita da un mezzo infinito e omogeneo contenente un'inclusione di superficie  $D_{\text{in}}$  e contorno  $\partial D_{\text{in}}$ . Sia  $u_g(\mathbf{y})$  il campo degli spostamenti di un punto nella sua posizione originale  $\mathbf{y} \notin D_{\text{in}}$ . Sia  $\boldsymbol{\sigma}^\infty = \mathbb{E}^m \boldsymbol{\varepsilon}^\infty$  la tensione assegnata sul contorno esterno della matrice (le quantità relative alla matrice sono indicate con l'apice m); tale campo è in equilibrio e si assume  $\boldsymbol{\varepsilon}^\infty$  costante.

La soluzione viene decomposta come segue:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^\infty + \boldsymbol{\sigma}^P \quad (3.8a)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^\infty + \boldsymbol{\varepsilon}^P \quad (3.8b)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^\infty + \mathbf{u}^P \quad (3.8c)$$

dove l'apice P indica l'effetto della perturbazione indotta dalla reazione dell'inclusione sulla matrice. La soluzione deve rispettare l'equilibrio, ovvero  $\boldsymbol{\sigma}^P$  ha divergenza nulla.

Si applica ora una forza concentrata nel punto  $\mathbf{y}$  e si determina il campo degli spostamenti  $\mathbf{u}^g$  che ne deriva. Le equazioni indefinite di equilibrio sono

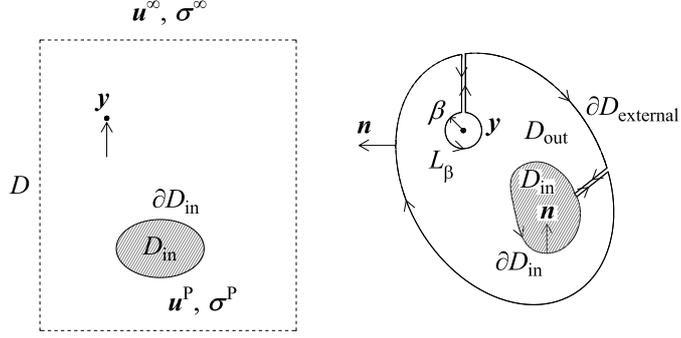


Figura 3.1: A sinistra, un mezzo infinito  $D$  contenente un'inclusione di superficie  $D_{\text{in}}$  (illustrata in grigio); si applica una forza a un punto  $\mathbf{y}$  che sta al di fuori dell'inclusione. A destra è illustrato il dominio di integrazione  $D_{\text{out}}$ ; la singolarità in  $\mathbf{y}$  è racchiusa in un disco  $C_\beta$  di raggio  $\beta$  e contorno  $L_\beta$ .

le seguenti:

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad (3.9a)$$

$$\sigma_{ij,j}^g + \delta_{gj}\delta(\mathbf{y} - \mathbf{x}) = 0 \quad (3.9b)$$

Si immagina ora che la singolarità nel punto  $\mathbf{y}$  sia racchiusa in un disco  $C_\beta$  centrato in  $\mathbf{y}$ , con raggio  $\beta$  e contorno  $L_\beta$ . Si definisce il dominio della matrice  $D_{\text{out}}$  come:

$$D_{\text{out}} = \mathbb{R}^2 - D_{\text{in}} - C_\beta \quad (3.10)$$

il cui contorno  $\partial D_{\text{out}}$  è dato da:

$$\partial D_{\text{out}} = \partial D_{\text{in}} + L_\beta + \partial D_{\text{external}} \quad (3.11)$$

Sulla regione  $D_{\text{out}}$  e sul suo relativo contorno appena definiti è possibile applicare l'identità di Betti, sia sul campo perturbato che sul campo all'infinito:

$$\int_{D_{\text{out}}} \left[ \sigma_{ij,j}^g(\mathbf{y} - \mathbf{x}) u_i^{\text{P}}(\mathbf{x}) - \sigma_{ij,j}^{\text{P}}(\mathbf{x}) u_i^g(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \right] dS_{\mathbf{x}} = 0 \quad (3.12a)$$

$$\int_{D_{\text{out}}} \left[ \sigma_{ij,j}^g(\mathbf{y} - \mathbf{x}) u_i^\infty(\mathbf{x}) - \sigma_{ij,j}^\infty(\mathbf{x}) u_i^g(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \right] dS_{\mathbf{x}} = 0 \quad (3.12b)$$

dove la virgola indica la derivata rispetto a  $\mathbf{x}$ . Tenendo conto che  $\sigma^g$ ,  $\sigma^{\text{P}}$  e  $\sigma^\infty$  sono legati ai rispettivi gradienti di spostamento mediante il tensore

elastico  $\mathbb{E}^m \in \text{Sym}$ ,<sup>1</sup> si ottiene:

$$\int_{\partial D_{\text{out}}} (\sigma_{ij}^g u_i^{\text{P}} - \sigma_{ij}^{\text{P}} u_i^g) n_j dl_{\mathbf{x}} = 0 \quad (3.13a)$$

$$\int_{\partial D_{\text{out}}} (\sigma_{ij}^g u_i^{\infty} - \sigma_{ij}^{\infty} u_i^g) n_j dl_{\mathbf{x}} = 0 \quad (3.13b)$$

rispettivamente per le integrazioni fatte per il campo perturbato e quello all'infinito. Dalla decomposizione (3.11) e tenendo conto che  $u_i^g \sim \ln r$ , si ottengono:

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \int_{L_{\beta}} \sigma_{ij}^g u_i^{\text{P}} n_j dl_{\mathbf{x}} = u_g \quad (3.14a)$$

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \int_{L_{\beta}} \sigma_{ij}^{\text{P}} u_i^g n_j dl_{\mathbf{x}} = 0 \quad (3.14b)$$

I campi  $\mathbf{u}^g$ ,  $\mathbf{u}^{\text{P}}$ ,  $\boldsymbol{\sigma}^g$ ,  $\boldsymbol{\sigma}^{\text{P}}$  devono decadere all'infinito, quindi i contributi dell'integrazione sul contorno  $\partial D_{\text{external}}$  sono nulli. Sottraendo le (3.13b) e (3.14b) alla (3.13a) si ottiene l'equazione integrale per il campo degli spostamenti per un generico punto  $\mathbf{y}$  al di fuori dell'inclusione:

$$u_g(\mathbf{y}) = u_g^{\infty}(\mathbf{y}) + \int_{\partial D_{\text{in}}} \left[ (\sigma_{ij}^{\text{P}} + \sigma_{ij}^{\infty}) u_i^g - (u_i^{\text{P}} + u_i^{\infty}) \sigma_{ij}^g \right] n_j dl_{\mathbf{x}} \quad (3.15)$$

---

<sup>1</sup>Questo perchè si sta al di fuori dell'inclusione.

## Capitolo 4

# Metodo dei potenziali complessi

### 4.1 Introduzione

I metodi analitici relativi alla teoria delle funzioni di variabile complessa sono stati introdotti per la prima volta nella formulazione della *teoria dell'elasticità piana* dal matematico russo *G.V. Kolosov* nel 1909 [13]. Tale formulazione è stata poi ripresa ed estesa dal suo connazionale *N.I. Muskhelishvili* [4]. La teoria dei numeri complessi fornisce uno strumento molto potente per la risoluzione di problemi di elasticità piana, tale metodo è basato sulla riduzione del problema elastico dei valori al contorno dal dominio reale al dominio complesso.

### 4.2 Numeri complessi e loro rappresentazione geometrica

La variabile complessa  $z$  è definita da due variabili reali  $x$  e  $y$  nella forma [10]

$$z = x + iy \quad (4.1)$$

ove  $i = \sqrt{-1}$  è l'unità immaginaria,  $x$  è la parte reale di  $z$ , cioè  $x = \operatorname{Re}(z)$ , mentre  $y$  è la parte immaginaria di  $z$ ,  $y = \operatorname{Im}(z)$ . Questa definizione può essere espressa in forma polare dall'eq (4.2) usando la formula di Eulero  $e^{i\theta} = (\cos \theta + i \sin \theta)$ .

$$z = re^{i\theta} = r(\cos \theta + i \sin \theta), \quad (4.2)$$

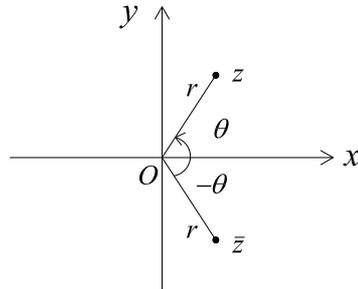


Figura 4.1: Piano Complesso

dove  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  rappresenta il *modulo* di  $z$  e  $\theta = \arctan(\frac{y}{x})$  ne è l'*argomento*. Queste definizioni possono essere visualizzate nel piano complesso come mostrato nella Fig. 4.2 dove la variabile  $z$  può essere interpretata come un punto nel piano complesso e i termini  $r$  e  $\theta$  hanno un ovvio significato grafico. La variabile complessa è composta da una parte reale ed una immaginaria, le quali sono descrivibili come un vettore a due componenti  $x$  e  $y$ ; tale rappresentazione viene spesso usata nelle applicazioni di elasticità piana [10]. E' utile definire il complesso coniugato della variabile  $z$

$$\bar{z} = x - iy = re^{-i\theta} = r(\cos \theta - i \sin \theta) \quad (4.3)$$

In seguito sono elencate alcune proprietà fondamentali dei numeri complessi coniugati [10]:

- Il coniugato della somma è la somma dei coniugati

$$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w} \quad (4.4)$$

- Il coniugato del prodotto è il prodotto dei coniugati

$$\overline{z\bar{w}} = \bar{z}w \quad (4.5)$$

- Il coniugato della divisione è la divisione dei coniugati

$$\frac{\overline{z}}{w} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}} \quad (4.6)$$

- Il coniugato della potenza è la potenza del coniugato

$$\overline{z^n} = (\overline{z})^n \quad (4.7)$$

- Il quadrato del modulo del numero complesso vale

$$|z|^2 = z \overline{z} \quad (4.8)$$

- Il coniugato del coniugato restituisce la variabile di partenza

$$\overline{\overline{z}} = z \quad (4.9)$$

- L'inverso del numero complesso vale

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} \quad (4.10)$$

da cui, per la (4.1), si ottiene

$$z^{-1} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} \quad (4.11)$$

## 4.3 Potenziali complessi per domini semplicemente connessi

### 4.3.1 Derivate formali di Cauchy

Sia  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  il dominio semplicemente connesso occupato dal corpo, riferito ad un sistema di coordinate cartesiane ortogonali  $Oxy$ . Si consideri una funzione a valori complessi [5]

$$F(x, y) = f_1(x, y) + if_2(x, y) \quad (4.12)$$

ove  $f_1(x, y)$  e  $f_2(x, y)$  sono funzioni reali definite in  $\Omega$ , ivi continue con derivate parziali prime continue. Dall'equazione (4.1) e (4.3) si può ottenere

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad (4.13)$$

$$y = \frac{z - \bar{z}}{2i} \quad (4.14)$$

ed inoltre, qualora si derivino le (4.1) e (4.3), si ottiene

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = i,$$

$$\frac{\partial \bar{z}}{\partial x} = 1,$$

$$\frac{\partial \bar{z}}{\partial y} = -i.$$

Dalle equazioni (4.13) e (4.14) si può scrivere la funzione  $F(x, y)$  come una funzione  $f(z, \bar{z})$  delle variabili complesse

$$F(x, y) = f[x(z, \bar{z}), y(z, \bar{z})] = f(z, \bar{z}). \quad (4.15)$$

Le derivate parziali prime di  $F$  si possono calcolare come

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = i \left[ \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right] \quad (4.17)$$

tramite forma operatoriale

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = i \left[ \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right] \quad (4.19)$$

Moltiplicando entrambi i termini della (4.19) per il fattore  $-i$  si ottiene

$$-i \left[ \frac{\partial}{\partial y} \right] = i \left[ \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right] (-i) \rightarrow \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \left[ \frac{\partial}{\partial z} + i \frac{\partial}{\partial y} \right]. \quad (4.20)$$

da cui, attraverso la (4.18) e sostituendo  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \left( \frac{\partial}{\partial z} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$  nell'equazione, si giunge alla prima derivata formale di *Cauchy*:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right]. \quad (4.21)$$

Agendo allo stesso modo è facile ricavare la seconda derivata formale di *Cauchy*:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right]. \quad (4.22)$$

Di conseguenza le precedenti equazioni possono essere poste nella forma operatoriale come operatori differenziali e le equazioni (4.18), (4.19), (4.23) e (4.24) prendono il nome di *derivate formali di Cauchy*:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right] \quad (4.23)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right] \quad (4.24)$$

### 4.3.2 Dalla funzione di Airy alle combinazioni fondamentali per le tensioni

Si rammenta quanto già introdotto in precedenza a proposito della *funzione di Airy*:

$$\Delta^2 A(x, y) = 0, \quad (4.25)$$

dove

$$\Delta = \nabla^2 = \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \quad (4.26)$$

è l'operatore Laplaciano nel piano. Se si considera la *funzione di Airy* espressa in regione delle variabili complesse  $z$  e  $\bar{z}$ , attraverso le (4.18) e (4.19) si può scrivere

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \left[ \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right]^2 = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \quad (4.27)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} = -1 \left[ \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right]^2 = -\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \quad (4.28)$$

cosicchè la somma delle precedenti equazioni dà come risultato:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \left[ \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right]^2 = 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}. \quad (4.29)$$

Di conseguenza l'equazione (4.25), considerando  $A(x, y)$  trasformata in  $f(z, \bar{z})$ , diventa

$$\left[ 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \right]^2 f(z, \bar{z}) = 0, \quad (4.30)$$

o equivalentemente

$$16 \frac{\partial^4}{\partial z^2 \partial \bar{z}^2} f(z, \bar{z}) = 0. \quad (4.31)$$

Infine l'equazione precedente può essere riscritta in maniera più compatta come:

$$\frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right] = 0 \quad (4.32)$$

così da notare che il termine  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left[ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right]$  non può che essere una costante  $a(z)$ , che integrata una prima volta porta a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \int a(z) \partial \bar{z} = a(z) \bar{z} + b(z). \quad (4.33)$$

Con un'ulteriore integrazione si arriva a

$$f(z, \bar{z}) = Re[\bar{z}\varphi(z) + \chi(z)] = Re[\tilde{f}] \quad (4.34)$$

in cui i due potenziali complessi  $\varphi(z)$  e  $\chi(z)$  sono legati alla *funzione di Airy* mediante l'equazione (4.34)

$$\varphi(z) = \iint a(z) dz^2 \quad ; \quad \chi(z) = \iint b(z) dz^2. \quad (4.35)$$

Da notare che la parte reale della funzione  $\tilde{f}(z, \bar{z}) = \bar{z}\varphi(z) + \chi(z)$  si trova mediante l'equazione (4.13)

$$f = \frac{\tilde{f} + \bar{\tilde{f}}}{2} \quad (4.36)$$

ove

$$\bar{\tilde{f}}(z, \bar{z}) = \overline{\bar{z}\varphi(z) + \chi(z)} = z\varphi(\bar{z}) + \chi(\bar{z}) \quad (4.37)$$

quindi si ottiene la parte reale della *funzione delle tensioni di Airy* tenendo conto che  $\overline{\varphi(z)} = \varphi(\bar{z})$  e  $\overline{\chi(z)} = \chi(\bar{z})$  perché  $\varphi(z) = b_0 + b_1z + b_2z^2 + \dots$  e  $\chi(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots$  sono funzioni polinomiali e quindi il coniugato della funzione è in realtà il coniugato della variabile.

$$f(z, \bar{z}) = \frac{\bar{z}\varphi(z) + \chi(z) + z\varphi(\bar{z}) + \chi(\bar{z})}{2} \quad (4.38)$$

La derivata seconda di quest'ultima equazione rispetto a  $z$  permette di ottenere

$$\frac{\partial^2 f(z, \bar{z})}{\partial z^2} = \frac{\bar{z}\varphi''(z) + \chi''(z)}{2} \quad (4.39)$$

ove  $\varphi(z)$  e  $\chi(z)$  si definiscono *potenziali complessi* o *funzioni analitiche*. Inoltre si considera

$$\psi(z) := \chi'(z) \quad (4.40)$$

Dalle equazioni che definiscono le tensioni in relazione alla funzione di Airy, sommando  $\sigma_{xx}$  e  $\sigma_{yy}$  si trova [5]

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} \quad (4.41)$$

la quale, tramite l'equazione (4.29), può essere riscritta come

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 4 \frac{\partial^2 f(z, \bar{z})}{\partial z \partial \bar{z}} \quad (4.42)$$

con la sostituzione della *funzione di Airy* complessa  $f(z, \bar{z}) = \text{Re} [\bar{z}\varphi(z) + \chi(z)]$  nell'equazione sovrascritta si ottiene

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 4 \frac{\partial^2 f(z, \bar{z})}{\partial z \partial \bar{z}} = 4 \text{Re} [\varphi'(z)] \quad (4.43)$$

e di conseguenza

$$\sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\tau_{xy} = 2 [\bar{z}\varphi''(z) + \chi''(z)] \quad (4.44)$$

Con l'ausilio dell'equazione (4.40) si ha

$$\sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\tau_{xy} = 2 [\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)]. \quad (4.45)$$

Infine si ottiene la terza relazione in termini di spostamenti

$$2\mu(u_1 + iu_2) = \kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}. \quad (4.46)$$

In conclusione si hanno le relazioni

$$\begin{cases} \sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 4\operatorname{Re}[\varphi'(z)] \\ \sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\tau_{xy} = 2[\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)] \\ 2\mu(u_1 + iu_2) = \kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} \end{cases} \quad (4.47)$$

dove  $\mu \equiv G = \frac{E}{2(1+\nu)}$  è il modulo di elasticità tangenziale con  $E$  il modulo elastico,  $\nu \in [-1, \frac{1}{2}]$  è il coefficiente di *Poisson*. In condizioni di deformazione piana si ricorda che vale

$$\kappa = \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} = 3 - 4\nu \geq 1 \quad (4.48)$$

ove

$$\lambda = \frac{2\nu\mu}{1 - 2\nu}$$

Mentre in condizioni di tensione piana si ha

$$\bar{\kappa} = \frac{\bar{\lambda} + 3\mu}{\bar{\lambda} + \mu} = \frac{3 - \nu}{1 + \nu} \quad (4.49)$$

ove

$$\bar{\lambda} = \frac{2\mu\nu}{1 - \nu}$$

Mediante semplici passaggi algebrici si ricavano le componenti delle tensioni in coordinate cartesiane:

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \operatorname{Re}[2\varphi'(z) - \bar{z}\varphi''(z) - \psi'(z)] \\ \sigma_{yy} = \operatorname{Re}[2\varphi'(z) + \bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)] \\ \tau_{xy} = \operatorname{Im}[\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)] \end{cases} \quad (4.50)$$

e in coordinate polari:

$$\begin{cases} \sigma_{rr} + \sigma_{\vartheta\vartheta} = 4\operatorname{Re}[\varphi'(z)] \\ \sigma_{\vartheta\vartheta} - \sigma_{rr} + 2i\sigma_{r\vartheta} = 2e^{2i\vartheta} [\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)] \\ 2\mu(u_r + iu_\vartheta) = e^{2i\vartheta} [\kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}] \end{cases} \quad (4.51)$$

da cui è possibile ricavare ogni componente come

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = \operatorname{Re}[2\varphi'(z) - e^{2i\vartheta} ((\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)))] \\ \sigma_{\vartheta\vartheta} = \operatorname{Re}[2\varphi'(z) + e^{2i\vartheta} ((\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)))] \\ \sigma_{r\vartheta} = \operatorname{Im}[e^{2i\vartheta} ((\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)))] \\ u_r = \frac{1}{2\mu}\operatorname{Re}\left[e^{-i\vartheta}(\kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)})\right] \\ u_\vartheta = \frac{1}{2\mu}\operatorname{Im}\left[e^{-i\vartheta}(\kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)})\right] \end{cases} \quad (4.52)$$

### 4.3.3 Forma dei potenziali complessi $\varphi(z)$ e $\psi(z)$

Dalla teoria delle funzioni analitiche è noto che in una regione semplicemente connessa e in un intervallo finito o infinito i potenziali complessi  $\varphi(z)$  e  $\psi(z)$  possono essere rappresentati per mezzo di funzioni analitiche (funzioni olomorfe) costituite da somme di serie di potenze [4]:

$$\varphi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^{-n} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n + a_0 \quad (4.53)$$

$$\psi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n z^{-n} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n + b_0 \quad (4.54)$$

ove  $a_n, b_n, c_n, d_n$  sono costanti complesse da determinare con le condizioni al contorno, invece  $a_0, b_0$  sono costanti complesse che non influiscono il campo delle tensioni.

## 4.4 Applicazioni

### 4.4.1 Problema della lastra infinita

Si abbia una lastra bidimensionale infinitamente estesa e caricata ai bordi con un carico assiale  $\sigma_{xx}^\infty, \sigma_{yy}^\infty$  uniformemente distribuito lungo  $x$  e  $y$  rispettivamente. Inoltre si consideri un carico uniformemente distribuito all'infinito  $\sigma_{xy}^\infty$  in direzione tangenziale, come mostrato nella figura 4.2.

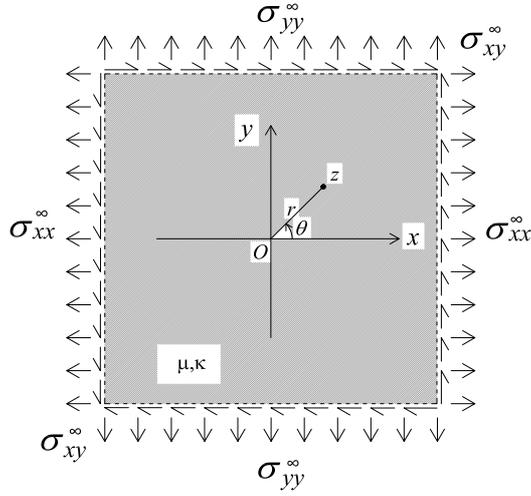


Figura 4.2: Lastra infinita

I potenziali complessi incogniti  $\varphi(z)$  e  $\psi(z)$  assumono la forma seguente

$$\varphi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n + a_0 \quad (4.55)$$

$$\psi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n + b_0 \quad (4.56)$$

in cui si è posto  $c_n = d_n = 0 \forall n$  per ovviare a singolarità che possono nascere quando  $z$  tende a zero e di conseguenza lo stress tende all'infinito, annullando i termini con le potenze negative. Si considereranno i potenziali complessi prendendo solo i primi 2 termini della serie di potenze. Si nota che le costanti complesse  $a_n$  e  $b_n$ , con  $n > 0$  devono essere identicamente nulle, affinché all'infinito i potenziali complessi non assumano valori illimitati e quindi fisicamente impossibili:

$$\varphi(z) = a_0 + a_1 z \quad (4.57)$$

$$\psi(z) = b_0 + b_1 z \quad (4.58)$$

Si noti che le costanti  $a_0$ ,  $b_0$ ,  $a_1$  e  $b_1$  sono costanti complesse quindi sono espresse nella forma complessa:

$$a_0 = a_{01} + ia_{02}$$

$$a_1 = a_{11} + ia_{12}$$

$$b_0 = b_{01} + ib_{02}$$

$$b_1 = b_{11} + ib_{12}$$

Usando le equazioni (4.50), (4.1) e (4.3) si ottiene

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = 2a_{11} - b_{11} \cos(2\theta) + b_{12} \sin(2\theta) \\ \sigma_{\theta\theta} = 2a_{11} + b_{11} \cos(2\theta) - b_{12} \sin(2\theta) \\ \sigma_{r\theta} = b_{12} \cos(2\theta) + b_{11} \sin(2\theta) \end{cases} \quad (4.59)$$

da cui si nota che le costanti  $a_0$  e  $b_0$  non influiscono sul campo delle tensioni. Le condizioni al contorno all'infinito della lastra sono descritte in seguito

- $\sigma_{rr}(x \rightarrow \infty; \theta \rightarrow 0) = \sigma_{xx}^\infty$
- $\sigma_{rr}(x \rightarrow \infty; \theta \rightarrow \frac{\pi}{2}) = \sigma_{yy}^\infty$
- $\sigma_{r\theta}(x \rightarrow \infty; \theta \rightarrow 0) = \sigma_{xy}^\infty$

dalle quali segue

$$\begin{cases} 2a_{11} - b_{11} = \sigma_{xx}^\infty \\ 2a_{11} + b_{11} = \sigma_{yy}^\infty \\ b_{12} = \sigma_{xy}^\infty \end{cases} \quad (4.60)$$

Risolvendo il sistema precedente si ottengono le costanti

$$a_{11} = \frac{\sigma_{xx}^\infty + \sigma_{yy}^\infty}{4}$$

$$a_{12} = 0$$

$$b_{11} = \frac{-\sigma_{xx}^\infty + \sigma_{yy}^\infty}{2}$$

$$b_{12} = \sigma_{xy}^\infty$$

ovvero

$$\begin{cases} a_1 = a_{11} + ia_{12} = \left[ \frac{\sigma_{xx}^\infty + \sigma_{yy}^\infty}{4} \right] \\ b_1 = b_{11} + ib_{12} = \left[ \frac{\sigma_{yy}^\infty - \sigma_{xx}^\infty}{2} \right] + i\sigma_{xy}^\infty \end{cases} \quad (4.61)$$

Di conseguenza i potenziali complessi diventano

$$\varphi(z) = \left[ \frac{\sigma_{xx}^{\infty} + \sigma_{yy}^{\infty}}{4} \right] z \quad (4.62)$$

$$\psi(z) = \left[ \frac{\sigma_{yy}^{\infty} - \sigma_{xx}^{\infty} + 2i\sigma_{xy}^{\infty}}{2} \right] z \quad (4.63)$$

da cui segue che il campo degli sforzi vale

- $\sigma_{rr} = \left[ \frac{\sigma_{xx}^{\infty} + \sigma_{yy}^{\infty}}{2} \right] - \left[ \frac{-\sigma_{xx}^{\infty} + \sigma_{yy}^{\infty}}{2} \right] \cos(2\theta) + \sigma_{xy}^{\infty} \sin(2\theta)$
- $\sigma_{\theta\theta} = \left[ \frac{\sigma_{xx}^{\infty} + \sigma_{yy}^{\infty}}{2} \right] + \left[ \frac{-\sigma_{xx}^{\infty} + \sigma_{yy}^{\infty}}{2} \right] \cos(2\theta) - \sigma_{xy}^{\infty} \sin(2\theta)$
- $\sigma_{r\theta} = \sigma_{xy}^{\infty} \cos(2\theta) + \left[ \frac{-\sigma_{xx}^{\infty} + \sigma_{yy}^{\infty}}{2} \right] \sin(2\theta)$

Una semplice verifica delle condizioni al contorno testimonia la bontà dell'analisi effettuata:

- Per  $r \rightarrow \infty$  e  $\theta \rightarrow 0$  ottengo

$$\sigma_{rr}(r, \theta) = \sigma_{xx}^{\infty}$$

$$\sigma_{\theta\theta}(r, \theta) = \sigma_{yy}^{\infty}$$

$$\sigma_{\theta\theta}(r, \theta) = \sigma_{xy}^{\infty}$$

- Per  $r \rightarrow \infty$  e  $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$  ottengo

$$\sigma_{rr}(r, \theta) = \sigma_{yy}^{\infty}$$

$$\sigma_{\theta\theta}(r, \theta) = \sigma_{xx}^{\infty}$$

$$\sigma_{\theta\theta}(r, \theta) = -\sigma_{xy}^{\infty}$$

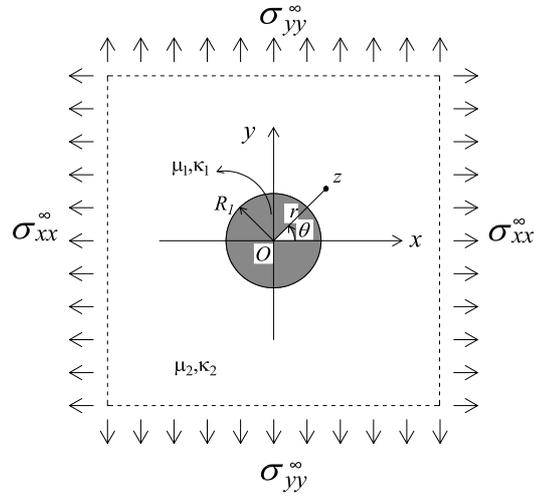


Figura 4.3: Inclusione elastica circolare

#### 4.4.2 Problema dell'inclusione elastica circolare

Si consideri una lastra bidimensionale infinitamente estesa con inclusione elastica di forma circolare centrata nell'origine rispetto alla matrice e caricata all'infinito con un carico assiale  $\sigma_{xx}^{\infty}, \sigma_{yy}^{\infty}$  uniformemente distribuito lungo  $x$  e  $y$  rispettivamente, come mostrato nella figura 4.3.

I potenziali complessi incogniti possono essere espressi in serie di potenze:

- Inclusione - materiale 1 ( $r < a$ ):

$$\varphi_1(z) = a_1 z \quad (4.64)$$

$$\psi_1(z) = b_1 z \quad (4.65)$$

- Matrice - materiale 2 ( $r > a$ ):

$$\varphi_2(z) = c_0 z + \frac{c_1}{z} \quad (4.66)$$

$$\psi_2(z) = d_0 z + \frac{d_1}{z} + \frac{d_2}{z^3} \quad (4.67)$$

Per l'inclusione il campo delle tensioni in coordinate polari, usando l'equazioni (4.52), è:

$$\sigma_{rr1} = 2a_1 - b_1 \cos(2\theta) \quad (4.68)$$

$$\sigma_{\theta\theta1} = 2a_1 + b_1 \cos(2\theta) \quad (4.69)$$

$$\sigma_{r\theta1} = b_1 \sin(2\theta) \quad (4.70)$$

mentre il campo delle deformazioni diviene

$$u_{r1} = -\frac{r(a_1 - a_1 \kappa_1 + b_1 \cos(2\theta))}{2\mu_1} \quad (4.71)$$

$$u_{\theta1} = \frac{b_1 r \cos \theta \sin \theta}{\mu_1} \quad (4.72)$$

Per quanto concerne la matrice, il campo delle tensioni in coordinate polari vale:

$$\sigma_{rr2} = 2c_0 + \frac{d_1}{r^2} - d_0 \cos(2\theta) + \frac{3d_2 \cos(2\theta)}{r^4} - \frac{4c_1 \cos(2\theta)}{r^2} \quad (4.73)$$

$$\sigma_{\theta\theta2} = 2c_0 - \frac{d_1}{r^2} + d_0 \cos(2\theta) - \frac{3d_2 \cos(2\theta)}{r^4} \quad (4.74)$$

$$\sigma_{r\theta2} = d_0 \sin(2\theta) + \frac{3d_2 \sin(2\theta)}{r^4} - \frac{4c_1 \sin(2\theta)}{r^2} \quad (4.75)$$

mentre il campo delle deformazioni è:

$$u_{r2} = \frac{-d_1 r^2 + c_0(-1 + \kappa_2)r^4 + (-d_2 + c_1(1 + \kappa_2)r^4 - d_0 r^4) \cos(2\theta)}{2r^3 \mu_2} \quad (4.76)$$

$$u_{\theta 2} = \frac{((-d_2 + r^2(c_1 - c_1 \kappa_2 + d_0 r^2)) \cos \theta \sin \theta)}{r^3 \mu_2} \quad (4.77)$$

Al fine di ricavare le costanti  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $c_0$ ,  $c_1$ ,  $d_0$ ,  $d_1$  e  $d_2$  si pongono le condizioni al contorno sull'interfaccia (4 c.c.) all'infinito (2 c.c.)

- $\sigma_{rr1}|_{r=a} = \sigma_{rr2}|_{r=a}$
- $\sigma_{r\theta 1}|_{r=a} = \sigma_{r\theta 2}|_{r=a}$
- $u_{r1}|_{r=a} = u_{r2}|_{r=a}$
- $u_{\theta 1}|_{r=a} = u_{\theta 2}|_{r=a}$
- $\sigma_{rr1}|_{r=\infty, \theta=0} = \sigma_{xx}^\infty$
- $\sigma_{rr1}|_{r=\infty, \theta=\frac{\pi}{2}} = \sigma_{yy}^\infty$

Risolvendo il sistema si ricava la soluzione generale per le costanti:

- $a_1 = \frac{\mu_1(1+\kappa_2)(\sigma_{xx}^\infty + \sigma_{yy}^\infty)}{4(2\mu_1 + (-1+\kappa_1)\mu_2)}$
- $b_1 = -\frac{\mu_1(1+\kappa_2)(\sigma_{xx}^\infty - \sigma_{yy}^\infty)}{2(\kappa_2\mu_1 + \mu_2)}$
- $c_0 = \frac{\sigma_{xx}^\infty + \sigma_{yy}^\infty}{4}$
- $c_1 = -\frac{a^2(\mu_1 - \mu_2)(\sigma_{xx}^\infty - \sigma_{yy}^\infty)}{2(\kappa_2\mu_1 + \mu_2)}$
- $d_0 = \frac{-\sigma_{xx}^\infty + \sigma_{yy}^\infty}{2}$
- $d_1 = \frac{a^2((\kappa_2 - 1)\mu_1 + \mu_2 - \kappa_1\mu_2)(\sigma_{xx}^\infty + \sigma_{yy}^\infty)}{2(2\mu_1 + (\kappa_1 - 1)\mu_2)}$
- $d_2 = -\frac{a^4(\mu_1 - \mu_2)(\sigma_{xx}^\infty - \sigma_{yy}^\infty)}{2(\kappa_2\mu_1 + \mu_2)}$

Quindi i potenziali complessi per l'inclusione elastica assumono la forma

- $\varphi_1(z) = \left[ \frac{\mu_1(1+\kappa_2)(\sigma_{xx}^\infty + \sigma_{yy}^\infty)}{4(2\mu_1 + (-1+\kappa_1)\mu_2)} \right] z$

- $\psi_1(z) = \left[ -\frac{\mu_1(1+\kappa_2)(\sigma_{xx}^\infty - \sigma_{yy}^\infty)}{2(\kappa_2\mu_1 + \mu_2)} \right] z$

mentre gli stessi per la matrice sono

- $\varphi_2(z) = \left[ \frac{\sigma_{xx}^\infty + \sigma_{yy}^\infty}{4} \right] z - \left[ \frac{a^2(\mu_1 - \mu_2)(\sigma_{xx}^\infty - \sigma_{yy}^\infty)}{2(\kappa_2\mu_1 + \mu_2)} \right] \frac{1}{z}$

- $\psi_2(z) = \left[ \frac{-\sigma_{xx}^\infty + \sigma_{yy}^\infty}{2} \right] z + \left[ \frac{a^2((\kappa_2 - 1)\mu_1 + \mu_2 - \kappa_1\mu_2)(\sigma_{xx}^\infty + \sigma_{yy}^\infty)}{2(2\mu_1 + (\kappa_1 - 1)\mu_2)} \right] \frac{1}{z} - \left[ \frac{a^4(\mu_1 - \mu_2)(\sigma_{xx}^\infty - \sigma_{yy}^\infty)}{2(\kappa_2\mu_1 + \mu_2)} \right] \frac{1}{z^3}$

Le costanti trovate in precedenza permettono di trovare i potenziali complessi incogniti i quali permettono di ricavare il campo degli sforzi e il campo degli spostamenti. In seguito sono presentati alcuni casi particolari della soluzione generale per il caso dell'inclusione elastica.

Attraverso lo stesso metodo è possibile risolvere i problemi di lastra con foro circolare o inclusione rigida circolare, soggetta a trazione o compressione bidirezionale, ottenendo risultati equipollenti a quelli ottenuti e mostrati attraverso la funzione di Airy.

#### 4.4.2.1 Confronto qualitativo tra risultati analitici e sperimentali per l'inclusione infinitamente rigida di forma circolare

Il risultato analitico ricavato con il metodo dei potenziali complessi permette il calcolo del campo degli sforzi dagli quali si possono ottenere le tensioni principali massima e minima ed il deviatore.

- Tensione principale massima

$$\sigma_I = \frac{\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})^2 + 4\sigma_{r\theta}^2} \quad (4.78)$$

- Tensione principale minima

$$\sigma_{II} = \frac{\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})^2 + 4\sigma_{r\theta}^2} \quad (4.79)$$

- La differenza delle tensioni principali

$$\sigma_I - \sigma_{II} = \sqrt{(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})^2 + 4\sigma_{r\theta}^2} \quad (4.80)$$

Si plotta il deviatore e si ottiene grafico mostrato in Figura4.4 che va confrontato con la soluzione sperimentale ottenutasi dal *fotoelasticità*. Si nota dalle curve di livello che al contrario del *problema di Kirsch* quando  $r \rightarrow a$  e  $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$  addirittura il materiale nell'intorno dell'inclusione si scarica  $\sigma_{\theta\theta}(r, \theta) = -0.067\sigma_{xx}^\infty$ . Invece per  $r \rightarrow a$  e  $\theta \rightarrow 0$  si ha che  $\sigma_{rr}(r, \theta) = 1.467\sigma_{xx}^\infty$ . Si conclude quindi che la crisi nel materiale avviene proprio per  $r \rightarrow a$  e  $\theta \rightarrow 0$ , come si può facilmente evincere dalle curve di livello date in Figura4.4.

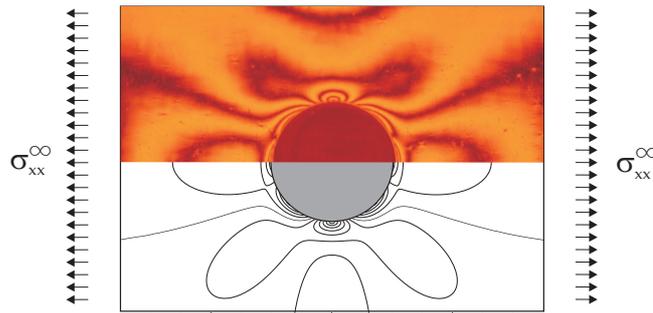


Figura 4.4: Soluzione analitica e sperimentale per l'inclusione infinitamente rigida di forma circolare con  $\nu = 0.48$



## Capitolo 5

# Tecnica della trasformazione conforme

Il metodo delle trasformazioni conformi è particolarmente utile poiché permette di dedurre la soluzione di un problema al contorno in un dominio  $R$  dalla soluzione del corrispondente problema in un altro dominio  $D_\zeta$  (dominio immagine di forma più semplice e liscia).[11]

La teoria delle funzioni conformi è una delle più antiche sottobranche dell'analisi matematica ed è a tutt'oggi oggetto di intensa ricerca. Un suo risultato-chiave è il Teorema della Mappa di Riemann (1851)[15]: due domini semplicemente connessi propriamente contenuti nel piano possono essere mappati uno nell'altro da una mappa conforme come mostrato nella figura (5.1). La regione  $D_z$  è mappata sulla regione  $D_\zeta$  mediante la funzione  $\zeta = f(z)$ .

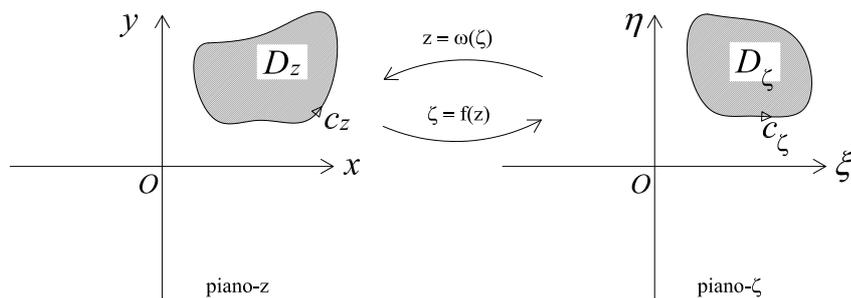


Figura 5.1: Conformal mapping

## 5.1 Definizione

Una funzione  $z = \omega(\zeta)$  della variabile complessa  $\zeta$  può essere interpretata come una trasformazione dal piano fisico  $z = x + iy$  al piano conforme  $\zeta = \xi + i\eta$ . La corrispondenza generata dalla funzione  $z = \omega(\zeta)$ , fra il dominio  $D_z$  del piano complesso  $z$  ed il dominio  $D_\zeta$  del piano complesso  $\zeta$  si dice trasformazione conforme se soddisfa le seguenti proprietà[6]:

1.  $\omega(\zeta)$  è biunivoca e continua;
2.  $\omega(\zeta)$  conserva gli angoli.

In particolare, se gli angoli conservano oltre al valore anche il segno, la trasformazione conforme si dice di *prima specie*. Mentre, se la corrispondenza è tale da conservare il valore degli angoli, ma di invertire il segno, la trasformazione si dice conforme di *seconda specie*. Inoltre vale il seguente teorema:

*Se  $z = \omega(\zeta)$  è una corrispondenza biunivoca e continua fra  $D_z$  e  $D_\zeta$ , ed è analitica in  $D_\zeta$  con  $\omega'(\zeta) \neq 0 \forall \zeta \in D_\zeta$ , allora  $\omega(\zeta)$  è una trasformazione conforme di prima specie.*

Nel risolvere in pratica un problema di trasformazione conforme di un assegnato dominio  $D_z$  in un assegnato dominio  $D_\zeta$ , il procedimento che si segue è quello di verificare che la funzione  $\omega(\zeta)$  trasformi il contorno  $C_z$  del dominio  $D_z$  nel contorno  $C_\zeta$  del dominio  $D_\zeta$ . Vale infatti il *principio di corrispondenza dei contorni*:

*Sia  $\omega(\zeta)$  una funzione analitica nel dominio  $D_\zeta$  di contorno  $C_\zeta$  continua in  $D_\zeta$ , con  $\omega'(\zeta) \neq 0 \forall \zeta \in D_\zeta$  - ovvero all'interno del contorno. Se  $\omega(\zeta)$  trasforma biunivocamente il contorno  $C_z$  nel contorno  $C_\zeta$  del dominio  $D_\zeta$ , allora  $\omega(\zeta)$  trasforma biunivocamente il dominio  $D_z$  nel dominio  $D_\zeta$ .*

Molti problemi di elasticità piana fanno affidamento su soluzioni relative al cerchio unitario, quindi si utilizzano principalmente le trasformazioni conformi di una regione  $R$  del piano  $z$  in un cerchio unitario nel piano  $\zeta$ , come illustrato nella figura (5.2).

## 5.2 Formulazione delle trasformazioni conformi

Per stabilire le relazioni di trasformazione appropriate, si parte da funzioni di mappatura generale  $\omega(\zeta)$  e  $f(z)$ . Definendo una relazione generale tra due variabili complesse  $z$  e  $\zeta$ :

$$z = \omega(\zeta) \quad \zeta = f(z) \tag{5.1}$$

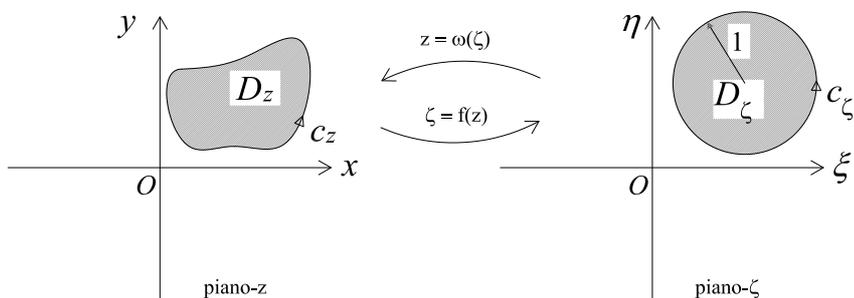


Figura 5.2: Trasformazioni conformi di una regione qualsiasi nel piano  $z$  nel cerchio unitario nel piano  $\zeta$ .

ove le  $w(\zeta)$  e  $f(\zeta)$  sono funzioni olomorfe e quindi le derivate sono date da:

$$\frac{dz}{d\zeta} = \frac{d\omega(\zeta)}{d\zeta} = \omega'(\zeta), \quad (5.2)$$

da cui segue

$$dz = \omega'(\zeta)d\zeta. \quad (5.3)$$

A questo punto i potenziali complessi devono essere trasformati in funzioni di  $\zeta$  attraverso le relazioni:

$$\varphi(z) = \varphi(\omega(\zeta)) = \varphi(\zeta), \quad (5.4)$$

$$\psi(z) = \psi(\omega(\zeta)) = \psi(\zeta), \quad (5.5)$$

e, utilizzando la regola della catena per derivazione  $\frac{d\varphi(z)}{dz} = \frac{d\varphi(\zeta)}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dz} = \frac{d\varphi(\zeta)}{d\zeta} \frac{d\zeta}{\omega'(\zeta)d\zeta}$ , si ottiene:

$$\varphi'(z) = \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}, \quad (5.6)$$

$$\psi'(z) = \frac{\psi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}. \quad (5.7)$$

### 5.2.1 Trasformazione delle tensioni e degli spostamenti

Dal seguente sistema di equazioni che sancisce le relazione tra le varie componenti di tensione e tra le componenti di spostamento

$$\begin{cases} \sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 4\operatorname{Re} \left[ \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \right] = 2 \left[ \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} + \overline{\frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}} \right] \\ \sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\sigma_{xy} = 2 \left[ \frac{\psi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} + \frac{\overline{\omega(\zeta)}}{\omega'(\zeta)^3} (\varphi''(\zeta)\omega'(\zeta) - \varphi'(\zeta)\omega''(\zeta)) \right] \\ 2\mu(u_1 + iu_2) = \kappa\varphi(\zeta) - \frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)}\overline{\varphi'(\zeta)} - \overline{\psi(\zeta)} \end{cases} \quad (5.8)$$

si possono ricavare semplicemente le componenti singole delle tensioni in coordinate cartesiane come:

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \operatorname{Re} \left[ \frac{2\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} + \frac{\psi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} + \frac{\overline{\omega(\zeta)}}{\omega'(\zeta)^3} (\varphi''(\zeta)\omega'(\zeta) - \varphi'(\zeta)\omega''(\zeta)) \right] \\ \sigma_{yy} = \operatorname{Re} \left[ \frac{2\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} - \frac{\psi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} - \frac{\overline{\omega(\zeta)}}{\omega'(\zeta)^3} (\varphi''(\zeta)\omega'(\zeta) - \varphi'(\zeta)\omega''(\zeta)) \right] \\ \sigma_{xy} = \operatorname{Im} \left[ \frac{\psi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} + \frac{\overline{\omega(\zeta)}}{\omega'(\zeta)^3} (\varphi''(\zeta)\omega'(\zeta) - \varphi'(\zeta)\omega''(\zeta)) \right] \end{cases} \quad (5.9)$$

mentre in coordinate polari la (5.8) diviene

$$\begin{cases} \sigma_{rr} + \sigma_{\vartheta\vartheta} = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} \\ \sigma_{\vartheta\vartheta} - \sigma_{rr} + 2i\sigma_{r\vartheta} = [\sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\sigma_{xy}] \frac{\omega'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \frac{\zeta}{\zeta} \\ 2\mu(u_r + iu_{\vartheta}) = [2\mu(u_1 + iu_2)] \frac{\overline{\omega(\zeta)}}{|\omega'(\zeta)\zeta|} \bar{\zeta} \end{cases} \quad (5.10)$$

### 5.2.2 Trasformazione delle condizioni al contorno

Le condizioni al contorno valide sul contorno  $L$  vanno trasportate sul contorno  $\gamma$ , e.g. 5.16. [7]

#### 5.2.2.1 Condizioni al contorno nelle tensioni

$$\begin{cases} \varphi(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)}\overline{\varphi'(\sigma)} + \overline{\psi(\sigma)} = f_1(\sigma) + if_2(\sigma) = f \\ \overline{\varphi(\sigma)} + \frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(\sigma)}\varphi'(\sigma) + \psi(\sigma) = f_1(\sigma) - if_2(\sigma) = \bar{f} \end{cases} \quad (5.11)$$

ove

$$\begin{cases} f = f_1(\sigma) + if_2(\sigma) = i \int_{t_0}^t (X_n + iY_n) ds \\ \bar{f} = f_1(\sigma) - if_2(\sigma) = i \int_{t_0}^t (X_n - iY_n) ds \end{cases} \quad (5.12)$$

Ove  $f = f_1(\sigma) + if_2(\sigma)$  è una funzione definita su  $\sigma$ ; questa funzione può essere assunta nota. Invece  $X_n$  e  $Y_n$  sono delle componenti note del vettore delle tensioni esterne che agiscono sul lato di una superficie con la normale uscenten. Inoltre  $t = \omega(\sigma)$ ,  $t$  rappresenta dei punti sul contorno  $L$  nel piano  $z$  e  $\sigma$  rappresenta dei punti sul contorno  $\gamma$  nel piano  $\zeta$ .

Le condizioni al contorno per il contorno scarico sono  $\begin{cases} f = 0 \\ \bar{f} = 0 \end{cases}$ , da cui si ottiene

$$\begin{cases} \varphi(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{\varphi'(\sigma)} + \overline{\psi(\sigma)} = 0 \\ \overline{\varphi(\sigma)} + \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \varphi'(\sigma) + \psi(\sigma) = 0 \end{cases} \quad (5.13)$$

### 5.2.2.2 Condizioni al contorno negli spostamenti

$$\begin{cases} \kappa\varphi(\sigma) - \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{\varphi'(\sigma)} - \overline{\psi(\sigma)} = 2\mu(g_1 + ig_2) = 2\mu g \\ \kappa\overline{\varphi(\sigma)} - \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \varphi'(\sigma) - \psi(\sigma) = 2\mu(g_1 - ig_2) = 2\mu\bar{g} \end{cases} \quad (5.14)$$

ove

$$\begin{cases} g = g_1(\sigma) + ig_2(\sigma) \\ \bar{g} = g_1(\sigma) - ig_2(\sigma) \end{cases} \quad (5.15)$$

Ove  $g = g_1(\sigma) + ig_2(\sigma)$  sono dei valori al contorno delle componenti di spostamento  $u$  e  $v$  riferite al sistema di riferimento  $Ox$ ,  $Oy$ . Le condizione al contorno qualora si avessero spostamenti imposti nulli sul contorno, ovvero

$$\begin{cases} g = 0 \\ \bar{g} = 0 \end{cases} \quad (\text{come avviene per l'inclusione rigida}). \text{ Quindi si ottiene}$$

$$\begin{cases} \kappa\varphi(\sigma) - \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{\varphi'(\sigma)} - \overline{\psi(\sigma)} = 0 \\ \kappa\overline{\varphi(\sigma)} - \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \varphi'(\sigma) - \psi(\sigma) = 0 \end{cases}, \quad (5.16)$$

con  $\kappa = \frac{3-\nu}{1+\nu}$  parametro che definisce il materiale per lo stato piano di sforzo e  $\kappa = 3 - 4\nu$  per lo stato piano di deformazione.

### 5.2.3 I potenziali complessi in forma generale

Si assume che le componenti di tensione siano limitate nel dominio infinito ed assumendo che  $\sigma_{xx}^\infty$ ,  $\sigma_{yy}^\infty$  e  $\sigma_{xy}^\infty$  siano i loro valori finiti all'infinito[6], si ottiene nel piano  $z$

$$\begin{cases} \varphi(z) = - \left[ \frac{F}{2\pi(1+\kappa)} \right] \log z + \Gamma z + \varphi_1(z) \\ \psi(z) = \left[ \frac{\kappa \bar{F}}{2\pi(1+\kappa)} \right] \log z + \Gamma' z + \psi_1(z) \end{cases} \quad (5.17)$$

mentre nel piano  $\zeta$ , sapendo che  $z = \omega(\zeta)$

$$\begin{cases} \varphi(\zeta) = - \left[ \frac{F}{2\pi(1+\kappa)} \right] \log \omega(\zeta) + \Gamma \omega(\zeta) + \varphi_1(\zeta) \\ \psi(\zeta) = \left[ \frac{\kappa \bar{F}}{2\pi(1+\kappa)} \right] \log \omega(\zeta) + \Gamma' \omega(\zeta) + \psi_1(\zeta) \end{cases} \quad (5.18)$$

ove  $F$  e  $\bar{F}$  sono le risultanti delle forze esterne agenti, nel nostro caso nulle, da cui si ricava

$$\begin{cases} \varphi(\zeta) = \Gamma \omega(\zeta) + \varphi_1(\zeta) \\ \psi(\zeta) = \Gamma' \omega(\zeta) + \psi_1(\zeta) \end{cases} \quad (5.19)$$

ove  $\varphi_1(\zeta)$  e  $\psi_1(\zeta)$  sono olomorfe nella regione considerata. Le costanti  $\Gamma$ ,  $\Gamma'$  sono invece numeri complessi e valgono

$$\begin{cases} \Gamma = B + iC \\ \Gamma' = B' + iC' \end{cases} \quad (5.20)$$

con

$$\begin{cases} B = \frac{\sigma_{xx}^\infty + \sigma_{yy}^\infty}{4} \\ B' = \frac{-\sigma_{xx}^\infty + \sigma_{yy}^\infty}{2} \\ C = \frac{2\mu\Omega^\infty}{1+\kappa} \\ C' = \sigma_{xy}^\infty \end{cases}, \quad (5.21)$$

dove  $\Omega^\infty$  è il valore assunto dalla rotazione all'infinito, il quale, nel caso di geometrie simmetriche caricate simmetricamente risulta ad essere nullo, da cui

$$\begin{cases} \Gamma = Re[\Gamma] = \frac{\sigma_{xx}^\infty + \sigma_{yy}^\infty}{4} \\ \Gamma' = \frac{-\sigma_{xx}^\infty + \sigma_{yy}^\infty}{2} + i\sigma_{xy}^\infty \end{cases} \quad (5.22)$$

ed infine

$$\begin{cases} \varphi(\zeta) = \left[ \frac{\sigma_{xx}^\infty + \sigma_{yy}^\infty}{4} \right] \omega(\zeta) + \varphi_1(\zeta) \\ \psi(\zeta) = \left[ \frac{-\sigma_{xx}^\infty + \sigma_{yy}^\infty}{2} + i\sigma_{xy}^\infty \right] \omega(\zeta) + \psi_1(\zeta) \end{cases}, \quad (5.23)$$

ove  $\omega(\zeta)$  è la funzione di trasformazione conforme che può essere calcolata con vari metodi, ad esempio per un'inclusione di forma poligonale convessa è possibile utilizzare l'integrale di *Schwarz-Christoffel*, mentre  $\varphi_1(\zeta)$  e  $\psi_1(\zeta)$  si calcolano utilizzando le proprietà degli integrali di *Cauchy* [2].

### 5.3 Integrale di Schwarz-Christoffel

Secondo il teorema di mappatura di *Riemann*, esiste una mappa conforme che trasforma il disco unitario in qualsiasi regione semplicemente connessa planare; tuttavia, trovare una mappa per una determinata regione è generalmente difficile. La *Schwarz-Christoffel integral formula* è conosciuta fin dagli anni 1860, ma ha avuto un uso relativamente modesto fino ad oggi [3]. Un importante caso particolare in cui si utilizza tale formula è quando la regione di interesse è poligonale. In questo caso, la formula integrale di *Schwarz-Christoffel* è scritta come:

$$z = \omega(\zeta) = c \int_1^\zeta \prod_{i=1}^n (t - a_i)^{\alpha_i - 1} \frac{dt}{t^2} + k_0 \quad (5.24)$$

ove il poligono ha  $n$  vertici,  $c = Re^{i\theta}$  e  $k_0$  sono delle costanti complesse,  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  sono costanti reali che indicano la frazione di  $\pi$  dell'angolo esterno del poligono e i numeri  $a_1, \dots, a_n$  sono le pre-immagini dei vertici del poligono, o prevertici, che si trovano in ordine sul cerchio unitario. Inoltre con  $t$  si indicano i punti individuali fuori dal cerchio,  $|t| \geq 1$ . La rappresentazione espressa dalla funzione di *Schwarz-Christoffel* (5.24) dà una trasformazione conforme continua del contorno, ad eccezione dei vertici  $a_1, \dots, a_n$  in cui la funzione  $\omega'(\zeta)$  si annulla, e la conformità è discontinua in tali punti, per cui è riscrivibile come

$$z = \omega(\zeta) = c \int_1^\zeta (t - a_1)^{\alpha_1 - 1} \cdot (t - a_2)^{\alpha_2 - 1} \cdot (t - a_3)^{\alpha_3 - 1} \dots (t - a_n)^{\alpha_n - 1} \frac{dt}{t^2} + k_0. \quad (5.25)$$

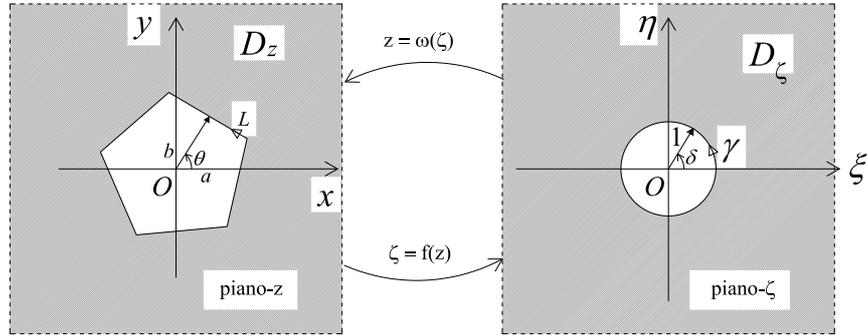


Figura 5.3: Schwarz-Christoffel conformal mapping

Una volta osservato che la somma degli angoli esterni di un poligono convesso con  $j$  lati è uguale a  $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = n + 2$ , ove  $n$  sono i vertici del poligono, l'integrando si trasforma in:

$$z = \omega(\zeta) = c \int_1^{\zeta} \left(1 - \frac{a_1}{t}\right)^{\alpha_1 - 1} \cdot \left(1 - \frac{a_2}{t}\right)^{\alpha_2 - 1} \cdot \left(1 - \frac{a_3}{t}\right)^{\alpha_3 - 1} \dots \left(1 - \frac{a_n}{t}\right)^{\alpha_n - 1} dt + k_0 \quad (5.26)$$

Dato che  $|a_n| = 1$  e  $|t| \geq 1$ , l'integrando in formula (5.26) si può espandere in una serie nella regione del punto infinitamente remoto ed in seguito a integrazione si ottiene:

$$z = \omega(\zeta) = c \left\{ \zeta - [(a_1 - 1)a_1 + (a_2 - 1)a_2 + \dots + (a_n - 1)a_n] \ln \zeta + \frac{e_1}{\zeta} + \frac{e_2}{\zeta^2} + \dots \right\} \quad (5.27)$$

ove le costanti reali  $e_j$  vanno calcolate risolvendo l'integrale di *Schwarz-Christoffel*. Si noti che l'integrale di Schwarz-Christoffel fornisce una trasformazione conforme che trasforma la regione infinita con inclusione di forma qualsiasi poligonale in una regione infinita con una inclusione circolare di raggio unitario, come mostrato in figura (5.3).

### 5.3.1 Applicazioni dell'integrale di Schwarz-Christoffel

#### 5.3.1.1 Conformal function per il Rombo

Si considera un rombo con proprietà di simmetria rispetto agli due assi principali dalla Figura (5.4). I valori di  $a_n$ ,  $\alpha_n$  nel piano  $\zeta$  si ottengono mediante

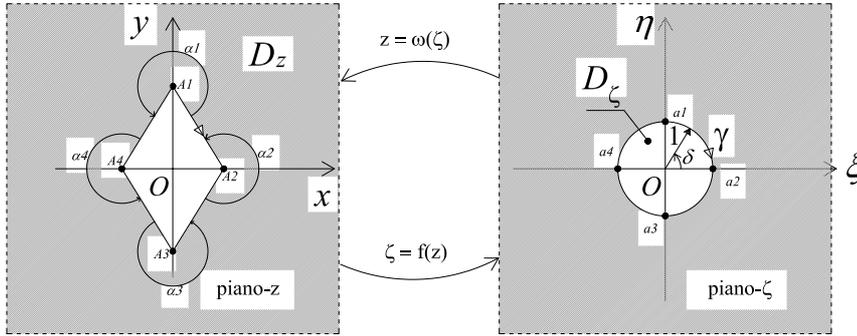


Figura 5.4: La posizione degli  $A_n$ ,  $a_n$ ,  $\alpha_n$  nel piano  $z$  e  $\zeta$  per conformal function per il rombo

semplici considerazioni geometriche: si noti infatti, grazie alla simmetria, che  $\alpha_1 = \alpha_3$  e  $\alpha_2 = \alpha_4$  ed inoltre valgono le seguenti relazioni

$$\begin{cases} a_1 = e^{i\delta} = e^{i\frac{\pi}{2}} \\ a_2 = 1e^{i\delta} = e^{i0} = 1 \\ a_3 = 1e^{i\delta} = e^{i\frac{3\pi}{2}} \\ a_4 = 1e^{i\delta} = e^{i\pi} \end{cases} \quad (5.28)$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{5}{3} \\ \alpha_2 = \frac{4}{3} \\ \alpha_3 = \frac{5}{3} \\ \alpha_4 = \frac{4}{3} \end{cases} \quad (5.29)$$

La trasformazione conforme per il rombo è mostrata nella figura seguente

Risolviendo l'integrale di *Schwarz-Christoffel* con i coefficienti  $a_n$ ,  $\alpha_n$  e troncando al serie a diversi termini in base alla precisione desiderata nella mappatura si ottengono le funzioni che mappano il cerchio di raggio unitario dal piano  $\zeta$  nel rombo del piano  $z$ . In seguito si ricavano le mapping functions  $\omega_n(\zeta)$  con ordine crescente degli  $j$  (numero di termini considerati della serie):

$$\omega_1(\zeta) = \zeta - \frac{1}{3\zeta} + \frac{4}{243\zeta^3}$$

$$\omega_2(\zeta) = \zeta - \frac{1}{3\zeta} + \frac{16}{243\zeta^3} - \frac{1}{1215\zeta^5} + \frac{16}{45927\zeta^7}$$

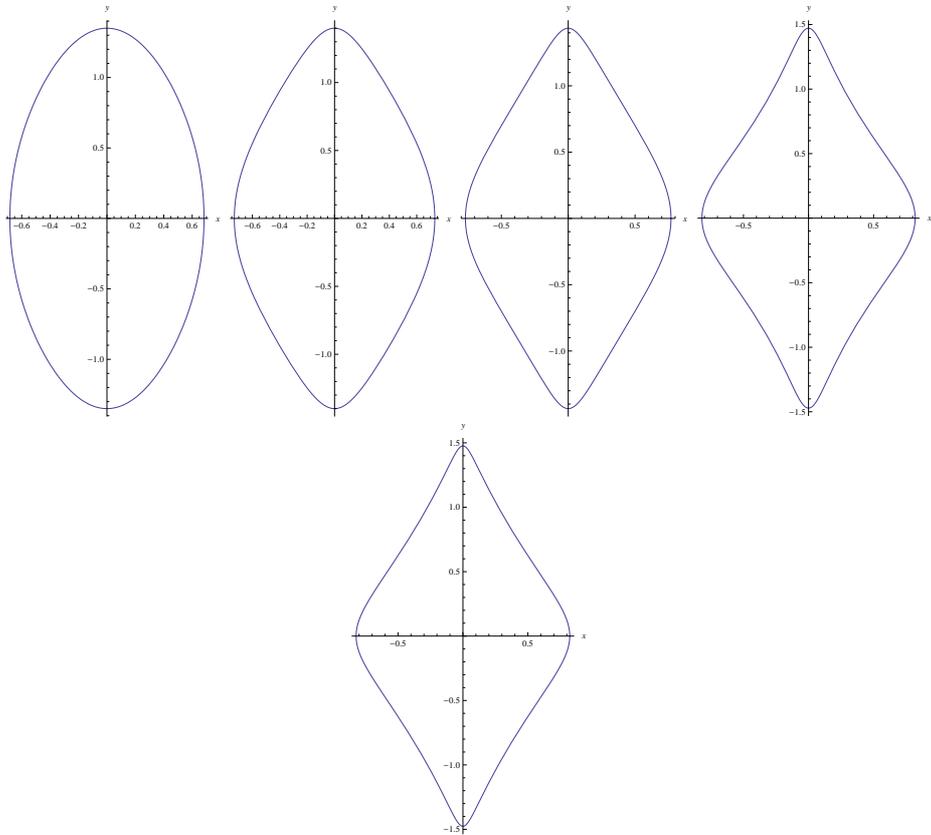


Figura 5.5: Rombo con approssimazione crescente fino a 5 termini

$$\omega_3(\zeta) = \zeta - \frac{1}{3\zeta} + \frac{74}{729\zeta^3} + \frac{2}{3645\zeta^5} + \frac{107}{413343\zeta^7} - \frac{71}{4782969\zeta^9} + \frac{400}{473513931\zeta^{11}}$$

.....

Infine per una approssimazione della serie con  $j = 15$  termini si ottiene un rombo con una buona approssimazione:

$$\omega_{15}(\zeta) = \zeta - \frac{1}{3\zeta} + \frac{74}{729\zeta^3} + \frac{2}{3645\zeta^5} + \frac{107}{413343\zeta^7} - \frac{71}{4782969\zeta^9} + \frac{400}{473513931\zeta^{11}} + \frac{28}{19683\zeta^{13}} + \frac{636088154}{470715894135\zeta^{15}} + \frac{76105538}{1600434040059\zeta^{17}} + \frac{338525804}{7625597484987\zeta^{19}} + \frac{5672494148}{1441237924662543\zeta^{21}} + \frac{1899350582680}{127858393030777029\zeta^{23}} + \frac{105469017344}{50031545098999707\zeta^{25}} + \frac{791294940996340}{109418989131512359209\zeta^{27}} + \frac{480069313223548}{4386481018291340495587541401600\zeta^{29}} + \frac{352572298312650935229\zeta^{31}}{706378395771159167527561661576305779235179\zeta^{33}} + \dots + \frac{30527897967691948219311\zeta^{35}}{4386481018291340495587541401600\zeta^{37}} + \dots + \frac{706378395771159167527561661576305779235179\zeta^{59}}{4386481018291340495587541401600\zeta^{61}} + \dots$$

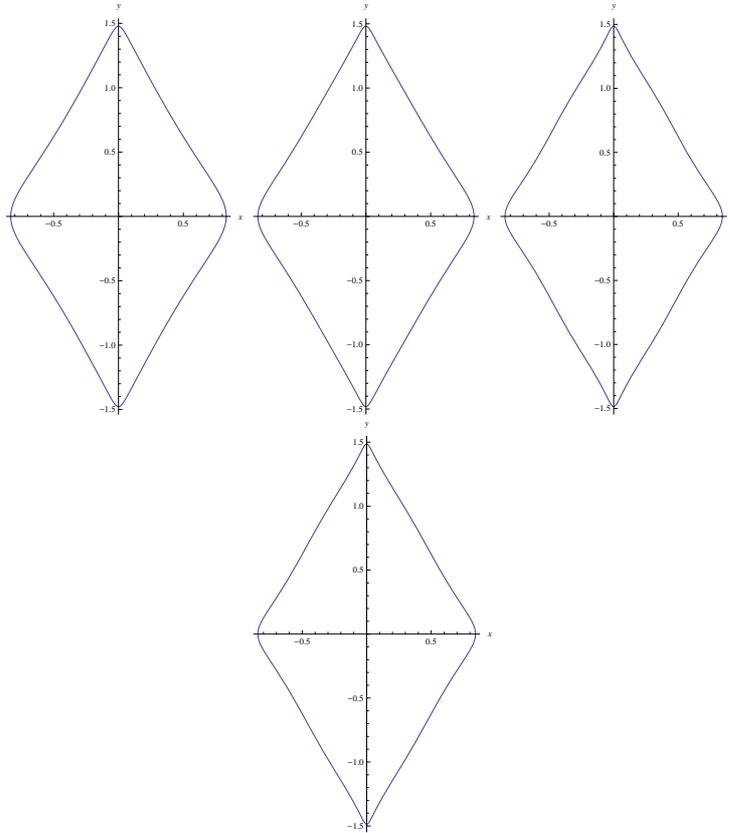


Figura 5.6: Rombo con approssimazione crescente fino a 9 termini

### 5.3.1.2 Conformal function per il rettangolo

Si considera un rettangolo con simmetria rispetto ai due assi principali come dalla figura 5.8. I valori di  $a_n$ ,  $\alpha_n$  in piano  $\zeta$  si ottengono tramite semplici considerazioni geometriche e anche in questo caso risulta  $\alpha_1 = \alpha_3$  e  $\alpha_2 = \alpha_4$  grazie alla doppia simmetria.

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 = 1e^{k\pi i} \\ a_2 = e^{(2-k)\pi i} \\ a_3 = e^{(1+k)\pi i} \\ a_4 = e^{(1-k)\pi i} \end{array} \right. \quad (5.30)$$

ove  $k = \frac{A1A4}{A1A2}$  rappresenta il rapporto tra i lati del rettangolo dalla Figura 5.8. Nel caso in cui  $k > \frac{1}{4}$  allora il rettangolo apparirebbe come mostrato

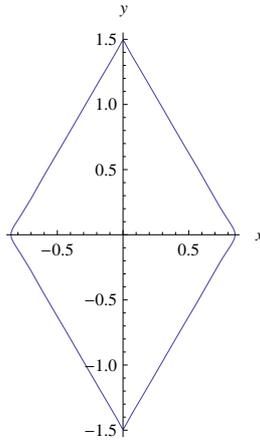


Figura 5.7: Rombo con approssimazione di 15 termini

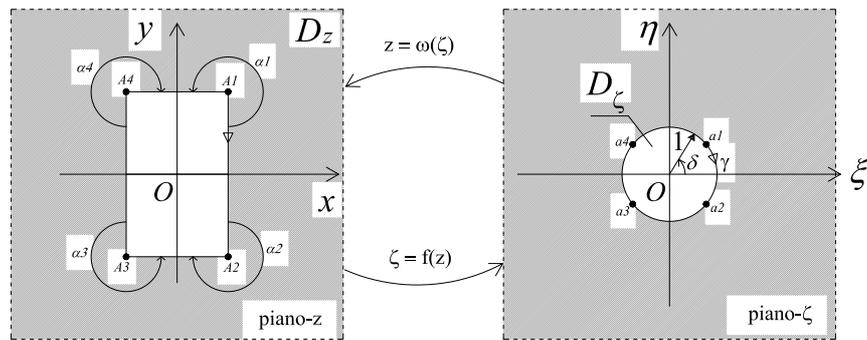


Figura 5.8: La posizione degli  $A_n$ ,  $a_n$ ,  $\alpha_n$  in piano  $z$  e  $\zeta$

in Figura 5.8, ovvero con i lati lunghi paralleli ad  $Oy$ , mentre se  $k < \frac{1}{4}$  i lati lunghi divengono paralleli all'asse  $Ox$ ; il valore  $k = \frac{1}{4}$  corrisponde al quadrato.

Se  $k = \frac{1}{6}$  si ottiene un rettangolo con i lati lunghi ( $A_1A_4 = 6A_1A_2$ ) paralleli a  $Ox$ , ed i coefficienti valgono

$$\begin{cases} a_1 = e^{\frac{\pi}{6}i} \\ a_2 = e^{(\frac{11}{6})\pi i} \\ a_3 = e^{(\frac{7}{6})\pi i} \\ a_4 = e^{(\frac{5}{6})\pi i} \end{cases} \quad (5.31)$$

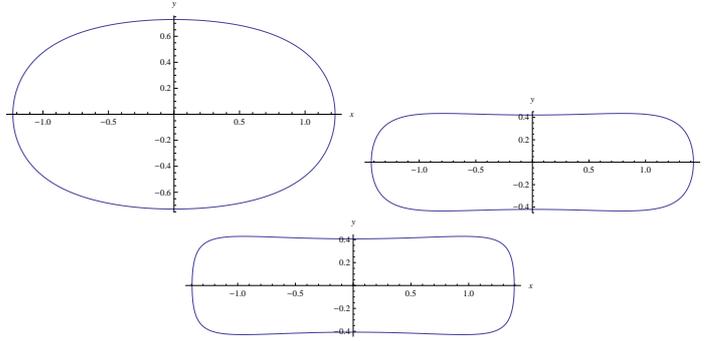


Figura 5.9: Rettangolo con approssimazione crescente fino a 3 termini

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = \frac{3}{2} \\ \alpha_2 = \frac{3}{2} \\ \alpha_3 = \frac{3}{2} \\ \alpha_4 = \frac{3}{2} \end{array} \right. \quad (5.32)$$

Risolvendo l'integrale di *Schwarz-Christoffel* con i coefficienti sopra indicati  $a_n, \alpha_n$  e troncando al serie a diversi termini si ottiene le funzione che mappa il cerchio di raggio unitario dal piano  $\zeta$  nel rombo nel piano  $z$ . In seguito si trovano le *conformal functions*  $\omega_n(\zeta)$  con ordine crescente degli  $n$  (numero di termini considerati della serie):

$$\begin{aligned} \omega_1(\zeta) &= \zeta + \frac{1}{4\zeta} - \frac{4}{48\zeta^3} \\ \omega_2(\zeta) &= \zeta + \frac{1}{2\zeta} - \frac{5}{64\zeta^3} - \frac{1}{640\zeta^5} - \frac{1}{28672\zeta^7} \\ \omega_3(\zeta) &= \zeta + \frac{1}{2\zeta} - \frac{19}{192\zeta^3} - \frac{1}{160\zeta^5} - \frac{1}{28672\zeta^7} - \frac{1}{49152\zeta^9} - \frac{1}{720896\zeta^{11}} \end{aligned}$$

### 5.3.1.3 Conformal function per il quadrato

Come già rammentato in precedenza nel caso in cui si abbia  $k = \frac{1}{4}$  si ottiene un quadrato ed i coefficienti diventano

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 = e^{\frac{\pi}{4}i} \\ a_2 = e^{\left(\frac{7}{4}\right)\pi i} \\ a_3 = e^{\left(\frac{5}{4}\right)\pi i} \\ a_4 = e^{\left(\frac{3}{4}\right)\pi i} \end{array} \right. \quad (5.33)$$

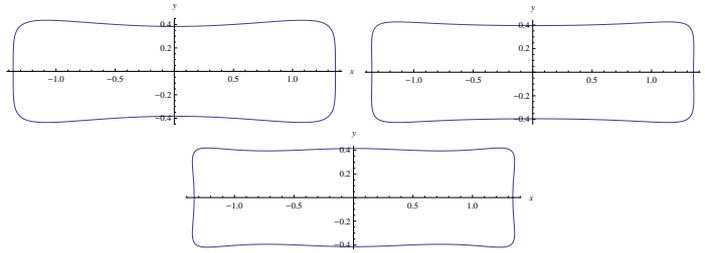


Figura 5.10: Rettangolo con approssimazione crescente fino a 6 termini

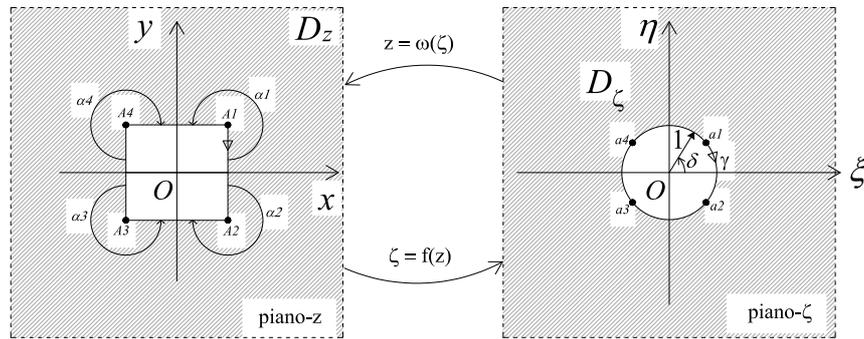


Figura 5.11: Conformal mapping del quadrato

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{3}{2} \\ \alpha_2 = \frac{3}{2} \\ \alpha_3 = \frac{3}{2} \\ \alpha_4 = \frac{3}{2} \end{cases} \quad (5.34)$$

Risolvendo l'integrale di *Schwarz-Christoffel* con i coefficienti sopra indicati  $a_n$ ,  $\alpha_n$  e troncando al serie a diversi termini si ottiene le funzione che mappa il cerchio di raggio unitario dal piano  $\zeta$  nel rombo nel piano  $z$ . In seguito si trovano le *conformal functions*  $\omega_n(\zeta)$  con ordine crescente degli  $n$  (numero di termini considerati della serie):

$$\begin{aligned} \omega_1(\zeta) &= \zeta - \frac{4}{48\zeta^3} \\ \omega_2(\zeta) &= \zeta - \frac{7}{96\zeta^3} - \frac{1}{28672\zeta^7} \\ \omega_3(\zeta) &= \zeta - \frac{11}{96\zeta^3} + \frac{1}{4096\zeta^7} - \frac{1}{720896\zeta^{11}} \end{aligned}$$

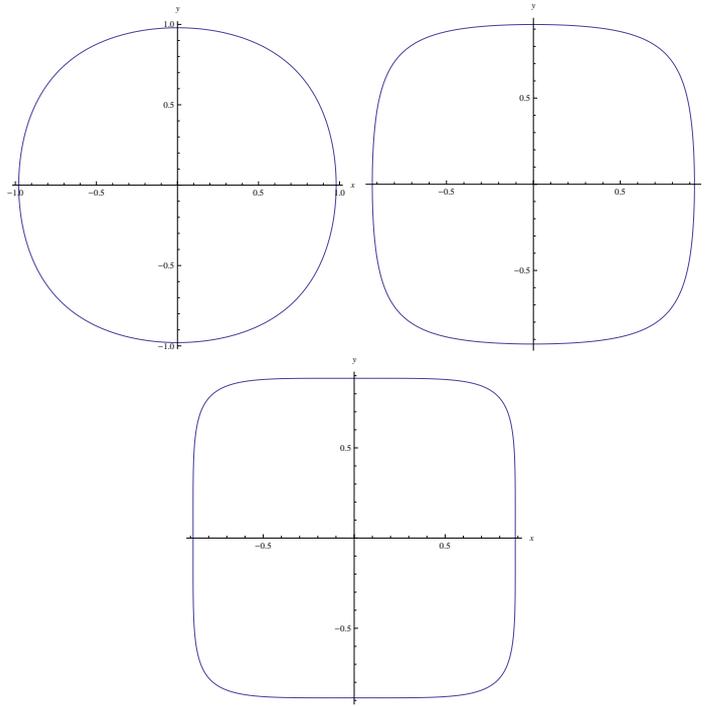


Figura 5.12: Quadrato con approssimazione crescente fino a 3 termini

...

$$\zeta - \frac{11}{96\zeta^3} + \frac{1}{4096\zeta^7} - \frac{1}{720896\zeta^{11}} - \frac{3257}{4026531840\zeta^{15}} + \frac{17101}{163208757248\zeta^{19}} - \frac{194481}{25288767438848\zeta^{23}}$$

### 5.3.2 Calcolo del raggio di curvatura negli angoli di un poligono

Data la *conformal function*  $\omega(\zeta)$  la si può trasformare in forma parametrica sostituendo  $\zeta = e^{i\theta}$  nelle equazioni (5.35)

$$\begin{cases} x = \operatorname{Re}[\omega(\zeta)] \\ y = \operatorname{Im}[\omega(\zeta)] \end{cases} \quad (5.35)$$

La curvatura, grazie alla formula di *Frenet-Serret* si esprime come

$$\kappa = \operatorname{Abs} \left[ \frac{x'y'' - y'x''}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} \right] \quad (5.36)$$

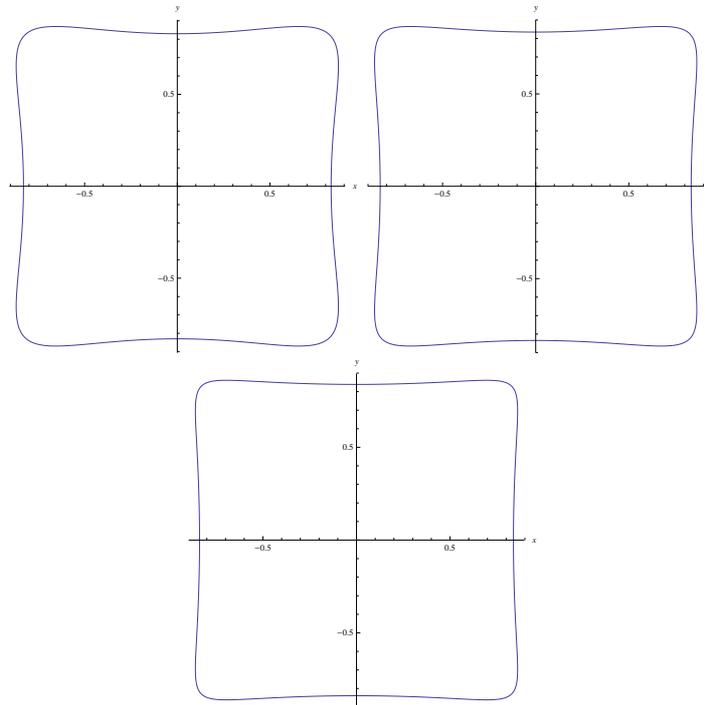


Figura 5.13: Quadrato con approssimazione crescente fino a 6 termini

da cui è possibile ottenere il raggio di curvatura

$$r = \frac{1}{\kappa} \quad (5.37)$$

### 5.3.3 Integrali di Cauchy

I problemi al contorno della teoria delle funzioni analitiche, ai quali possono essere ricondotti i problemi dell'elasticità piana, sono risolti con l'ausilio dell'integrale di *Cauchy* e delle sue varie generalizzazioni. Si richiamano di seguito alcuni risultati dedotti dalla teoria delle funzioni analitiche facendo riferimento al dominio circolare  $|\zeta| < 1$  i quali sono utili per le successive applicazioni. Al fine di non appesantire la scrittura i seguenti teoremi verranno enunciati senza dimostrazione, per la quale si rimanda a testi di comprovata validità.

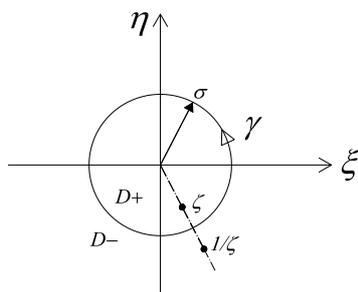


Figura 5.14: Dominio circolare nel piano complesso

Se si indica con  $D^+ : \{\zeta, |\zeta| < 1\}$  il dominio circolare nel piano complesso  $\zeta$ , di contorno  $\gamma(\sigma)$ , e con  $D^- : \{\zeta, |\zeta| > 1\}$  il dominio complementare (5.14). Si definiscono, considerando la figura 5.14

- $A_{D^+}^{(\gamma)}$  classe delle funzioni analitiche in  $D^+$  e continue su  $\gamma$ .
- $A_{D^-}^{(\gamma)}$  classe delle funzioni analitiche in  $D^-$  e continue su  $\gamma$ .

Valgono quindi i seguenti teoremi[6]:

**Teorema 1** : Se  $f(\zeta) \in A_{D^+}^{(\gamma)}$  allora

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\sigma)}{\sigma - \zeta} = \begin{cases} f(\zeta), & \zeta \in D^+ \\ 0, & \zeta \in D^- \end{cases} \quad (5.38)$$

**Teorema 2** : Se  $f(\zeta) \in A_{D^-}^{(\gamma)}$  allora

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\sigma)}{\sigma - \zeta} = \begin{cases} f(\infty), & \zeta \in D^+ \\ f(\infty) - f(\zeta), & \zeta \in D^- \end{cases} \quad (5.39)$$

Gli integrali che compaiono nelle equazioni (5.38) e (5.39) vengono chiamati in letteratura integrali di *Cauchy*. I precedenti teoremi possono essere estesi al caso generale in cui le funzioni di variabile complesse ammettano nei rispettivi domini di definizione dei poli. A questo proposito si ricorda che nell'intorno di un polo  $\zeta_k$ , di ordine  $n_k$ , una funzione  $f(\zeta)$  ammette uno sviluppo in serie costituito dalla somma di una parte regolare (analitica in  $\zeta_k$ ) e di una parte singolare (non analitica in  $\zeta_k$ ). Quest'ultima è chiamata anche parte principale di  $f(\zeta)$  in  $\zeta_k$  e si può indicare con

$$g_k(\zeta) = \sum_{n=1}^{n_k} \frac{a_n}{(\zeta - \zeta_n)^n} \quad (5.40)$$

ove gli  $a_n$  sono coefficienti in generale complessi. Nel caso in cui la  $f(\zeta)$  ammette all'infinito un polo di ordine  $l$ , la sua parte principale ha la forma seguente

$$g_\infty(\zeta) = \sum_{n=0}^l A_n \zeta^n \quad (5.41)$$

Consideriamo allora le seguenti definizioni:

- $A_{D^+}^{(\gamma)}(\zeta_k^N, n_k)$  classe delle funzioni analitiche in  $D^+$  tranne che negli  $N$  poli  $\zeta_k$ , di ordine  $n_k$ , continue su  $\gamma$ .
- $A_{D^-}^{(\gamma)}(\zeta_k^N, n_k, \infty^l)$  classe delle funzioni analitiche in  $D^-$  tranne che negli  $N$  poli all'infinito  $\zeta_k$ , di ordine  $n_k$ , e all'infinito, polo di ordine  $l$ , continue su  $\gamma$ .

Per tali classi di funzioni, valgono i seguenti teoremi

**Teorema 3** : Se  $f(\zeta) \in A_{D^+}^{(\gamma)}(\zeta_k^N, n_k)$  allora

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\sigma)}{\sigma - \zeta} = \begin{cases} f(\zeta) - \sum_{k=1}^N g_k(\zeta), & \zeta \in D^+ \\ - \sum_{k=1}^N g_k(\zeta), & \zeta \in D^- \end{cases} \quad (5.42)$$

**Teorema 4** : Se  $f(\zeta) \in A_{D^-}^{(\gamma)}(\zeta_k^N, n_k, \infty^l)$  allora

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\sigma)}{\sigma - \zeta} = \begin{cases} g_\infty(\zeta) + \sum_{k=1}^N g_k(\zeta), & \zeta \in D^+ \\ g_\infty(\zeta) + \sum_{k=1}^N g_k(\zeta) - f(\zeta), & \zeta \in D^- \end{cases} \quad (5.43)$$

**Teorema 5** : formula speciale per il cerchio [4]

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\overline{f(\sigma)}}{\sigma - \zeta} = \begin{cases} \bar{a} = f(\zeta = 0), & \zeta \in D^+ \\ 0, & \zeta \in D^- \end{cases} \quad (5.44)$$

**Teorema 6** : Se  $f(\zeta) \in A_{D^+}^{(\gamma)}$  allora e  $n$  è un numero intero si ha

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{d\sigma}{\sigma^n (\sigma - \zeta)} = \begin{cases} 0, & n > 0 \\ 1, & n = 0 \end{cases} \quad (5.45)$$

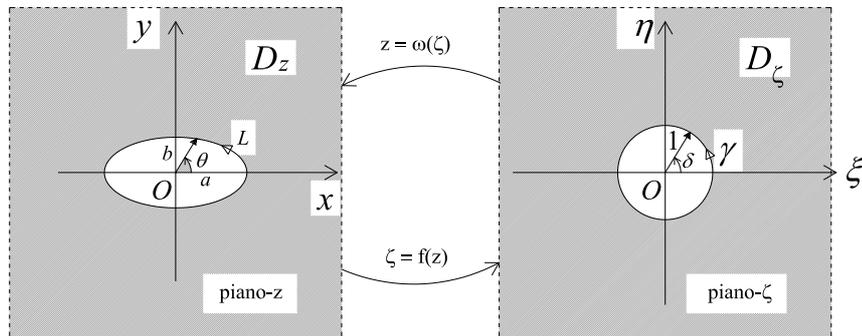


Figura 5.15: Conformal mapping dell'ellisse

## 5.4 Applicazioni

### 5.5 Inclusione ellittica

Il conformal function che trasforma un piano infinito con l'inclusione ellittica in un piano infinito con l'inclusione circolare di raggio unitario è dato da

$$z = \omega(\zeta) = R\left(\zeta + \frac{m}{\zeta}\right) \quad (5.46)$$

ove  $R$  e  $m$  sono due parametri geometrici e hanno seguente espressione analitica

$$R = \frac{a+b}{2}$$

$$m = \frac{a-b}{a+b}$$

Obiettivo è trovare i potenziali complessi incogniti  $\varphi(\zeta)$  e  $\psi(\zeta)$  nel piano  $\zeta$  mediante le condizioni al contorno, le quali verranno integrate secondo Cauchy sul contorno  $\gamma$  nel piano  $\zeta$ . Una volta trovati i potenziali complessi si potrà trovare il campo degli spostamenti.

#### 5.5.1 Inclusione rigida ellittica

Se si considera un piano infinito con l'inclusione ellittica rigida, le condizioni al contorno sugli spostamenti prendono la forma seguente:

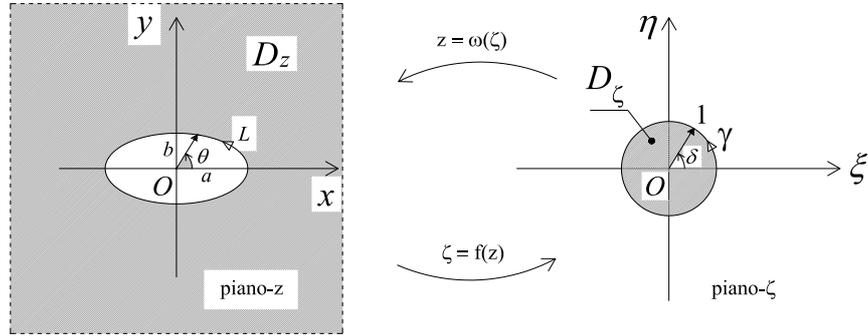


Figura 5.16: Conformal mapping dell'ellisse

$$\begin{cases} k\varphi(\sigma) - \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)}\overline{\varphi'(\sigma)} - \overline{\psi(\sigma)} = 0 \\ k\overline{\varphi(\sigma)} - \frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\overline{\omega'(\sigma)}}\varphi'(\sigma) - \psi(\sigma) = 0 \end{cases} \quad (5.47)$$

mentre se si valuta il conformal function della Figura 5.15 sul contorno  $\sigma = e^{i\theta}$  del cerchio di raggio unitario si ottiene

$$\omega(\sigma) = R\left(\sigma + \frac{m}{\sigma}\right)$$

da cui si calcolano le seguenti grandezze

$$\frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} = \frac{m+\sigma^2}{\sigma(1-m\sigma^2)},$$

$$\frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\overline{\omega'(\sigma)}} = \sigma \frac{1+m\sigma^2}{(\sigma^2-m)}.$$

Inoltre dalle equazioni generali per i potenziali complessi si trova

$$\begin{cases} \varphi(\zeta) = \Gamma\omega(\zeta) + \varphi^*(\zeta) \\ \psi(\zeta) = \Gamma'\omega(\zeta) + \psi^*(\zeta) \end{cases} \quad (5.48)$$

ove  $\varphi^*(\zeta)$  e  $\psi^*(\zeta)$  sono funzioni olomorfe fuori dal cerchio di raggio unitario contenuto nel piano infinito e hanno la forma

$$\varphi^*(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} a^n \frac{1}{\zeta^n},$$

$$\psi^*(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} b^n \frac{1}{\zeta^n}.$$

Sostituendo  $\omega(\sigma) = R(\sigma + \frac{m}{\sigma})$  nelle equazioni generali per i potenziali complessi si ottiene

$$\begin{cases} \varphi(\sigma) = \Gamma [R(\sigma + \frac{m}{\sigma})] + \varphi^*(\sigma) \\ \psi(\sigma) = \Gamma' [R(\sigma + \frac{m}{\sigma})] + \psi^*(\sigma) \end{cases} \quad (5.49)$$

ed in seguito, se si sostituiscono le funzioni olomorfe dentro e fuori il cerchio unitario si ha

$$\begin{cases} \varphi(\sigma) = \Gamma R\sigma + \Gamma R\frac{m}{\sigma} + \varphi^*(\sigma) \\ \psi(\sigma) = \Gamma' R\sigma + \Gamma' R\frac{m}{\sigma} + \psi^*(\sigma) \end{cases} \quad (5.50)$$

da cui

$$\begin{cases} \varphi(\sigma) = \Gamma R\sigma + \varphi_1(\sigma) \\ \psi(\sigma) = \Gamma' R\sigma + \psi_1(\sigma) \end{cases} ; \quad (5.51)$$

si noti che  $\varphi_1(\sigma)$  e  $\psi_1(\sigma)$  sono olomorfe fuori del cerchio di raggio unitario. Inoltre si possono calcolare seguenti grandezze

- $\overline{\varphi(\sigma)} = \frac{\Gamma R}{\sigma} + \overline{\varphi_1(\sigma)}$
- $\overline{\psi(\sigma)} = \frac{\Gamma' R}{\sigma} + \overline{\psi_1(\sigma)}$
- $\varphi'(\sigma) = \Gamma R + \varphi_1'(\sigma)$
- $\overline{\varphi'(\sigma)} = \Gamma R + \overline{\varphi_1'(\sigma)}$

e sostituendo queste ultime nelle c.c. si giunge all'equazione

$$k\Gamma R\sigma + k\varphi_1(\sigma) - \frac{m + \sigma^2}{\sigma(1 - m\sigma^2)} \left[ \Gamma R + \overline{\varphi_1'(\sigma)} \right] - \frac{\Gamma' R}{\sigma} - \overline{\psi_1(\sigma)} = 0 \quad (5.52)$$

la quale integrata secondo Cauchy porta

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \left[ k\Gamma R\sigma + k\varphi_1(\sigma) - \frac{m + \sigma^2}{\sigma(1 - m\sigma^2)} \left[ \Gamma R + \overline{\varphi_1'(\sigma)} \right] - \frac{\Gamma' R}{\sigma} - \overline{\psi_1(\sigma)} \right] \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} = 0 \quad (5.53)$$

e, risolvendo ciascuno dei termini integrali secondo i teoremi di Cauchy considerando eventuali poli nel dominio, si ottiene

$$k\varphi_1(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \left[ k\Gamma R\sigma - \frac{m + \sigma^2}{\sigma(1 - m\sigma^2)} \left[ \Gamma R + \overline{\varphi_1(\sigma)} \right] - \frac{\Gamma'R}{\sigma} - \overline{\psi_1(\sigma)} \right] \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} \quad (5.54)$$

da cui

$$k\varphi_1(\zeta) = -k\Gamma R\zeta + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \left[ \frac{m + \sigma^2}{\sigma(1 - m\sigma^2)} \left[ \Gamma R + \overline{\varphi_1(\sigma)} \right] \right] \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} \quad (5.55)$$

ed infine

$$\varphi_1(\zeta) = -\frac{R}{k\zeta} [m\Gamma + \Gamma']$$

da cui si ricava

$$\varphi(\zeta) = \Gamma R\zeta - \frac{R}{k\zeta} [m\Gamma + \Gamma'] . \quad (5.56)$$

Seguendo lo stesso procedimento visto in precedenza, con la seconda condizione al contorno si ha

$$\psi_1(\zeta) = \Gamma R \left[ \frac{k}{\zeta} - \frac{\zeta(1 + m\zeta^2)}{\zeta^2 - m} \right] + (m\Gamma + \Gamma') \frac{(1 + m\zeta^2) R}{\zeta^2 - m} \frac{1}{k\zeta} \quad (5.57)$$

ed infine

$$\psi(\zeta) = \Gamma'R\zeta + \Gamma R \left[ \frac{k}{\zeta} - \frac{\zeta(1 + m\zeta^2)}{\zeta^2 - m} \right] + (m\Gamma + \Gamma') \frac{(1 + m\zeta^2) R}{\zeta^2 - m} \frac{1}{k\zeta} \quad (5.58)$$

Ricordando le definizioni

$$\begin{cases} \Gamma = \frac{\sigma_{xx}^{\infty} + \sigma_{yy}^{\infty}}{2} \\ \Gamma' = \frac{-\sigma_{xx}^{\infty} + \sigma_{yy}^{\infty}}{2} + i\sigma_{xy}^{\infty} \end{cases} \quad (5.59)$$

si può procedere con il calcolo del campo degli sforzi con le equazioni seguenti

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = Re \left[ \frac{2\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} + \frac{\psi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} + \frac{\overline{\omega(\zeta)}}{\omega'(\zeta)^3} (\varphi''(\zeta)\omega'(\zeta) - \varphi'(\zeta)\omega''(\zeta)) \right] \\ \sigma_{yy} = Re \left[ \frac{2\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} - \frac{\psi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} - \frac{\overline{\omega(\zeta)}}{\omega'(\zeta)^3} (\varphi''(\zeta)\omega'(\zeta) - \varphi'(\zeta)\omega''(\zeta)) \right] \\ \sigma_{xy} = Im \left[ \frac{\psi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} + \frac{\overline{\omega(\zeta)}}{\omega'(\zeta)^3} (\varphi''(\zeta)\omega'(\zeta) - \varphi'(\zeta)\omega''(\zeta)) \right] \end{cases} \quad (5.60)$$

### 5.5.1.1 Confronto qualitativo tra risultato analitico e numerico

Il risultato analitico ricavato con il metodo della trasformazione conforme permette il calcolo del campo degli sforzi dai quali si possono ottenere le tensioni principali massima e minima e la componente deviatorica delle tensioni.

- Tensione principale massima

$$\sigma_I = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\sigma_{xy}^2} \quad (5.61)$$

- Tensione principale minima

$$\sigma_{II} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\sigma_{xy}^2} \quad (5.62)$$

- La differenza delle tensioni principali

$$\sigma_I - \sigma_{II} = \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\sigma_{xy}^2} \quad (5.63)$$

Per quanto riguarda invece il risultato numerico, esso è stato ottenuto con il programma ad elementi finiti *Comsol multiphysics 4.2a*. Come si può evincere dalla Figura 5.17 i due risultati sono pressoché coincidenti.

## 5.6 Inclusione infinitamente rigida sottile

La soluzione ottenuta per l'inclusione ellittica rigida può essere utilizzata per ricavare la soluzione per l'inclusione sottile rigida (quando  $m = 1$ ) come segue

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \frac{\sigma_{xx}^\infty + \sigma_{yy}^\infty}{4} - \frac{(\kappa + 1)\sigma_{xx}^\infty + (\kappa - 3)\sigma_{yy}^\infty}{8\kappa} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 - l^2}}\right), \\ \Psi(z) &= \frac{\sigma_{yy}^\infty - \sigma_{xx}^\infty}{2} + i\sigma_{xy}^\infty + \\ &+ \frac{(\kappa + 1)\sigma_{xx}^\infty + (\kappa - 3)\sigma_{yy}^\infty}{8\kappa} \left[1 + \kappa - (2 + \kappa)\frac{z}{\sqrt{z^2 - l^2}} + \frac{z^3}{\sqrt{(z^2 - l^2)^3}}\right]. \end{aligned} \quad (5.64)$$

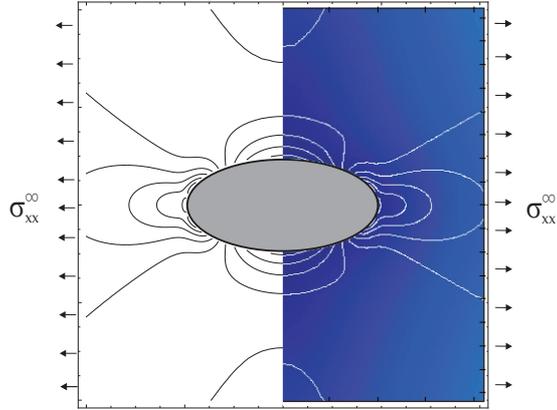


Figura 5.17: Confronto qualitativo tra soluzione analitica (sinistra) e numerica (destra) del deviatore degli stress con  $\nu = 0.29$

Nella Figura 5.18 si illustra il confronto tra la soluzione analitica e sperimentale per l'inclusione infinitamente rigida sottile.

## 5.7 Inclusione quadrata

Si considera un piano infinito contenente l'inclusione rigida di forma quadrata; il *conformal function* approssimato prendendo i primi due termini del polinomio che trasforma il quadrato in un disco di raggio unitario, come mostrato nella Figura 5.11 è

$$\omega(\zeta) = R \left( \frac{1}{\zeta} + e1\zeta^3 \right)$$

ove  $e1$  è una costante reale che vale  $e1 = -\frac{1}{6}$ .

Graficamente si ottiene

### 5.7.1 Inclusione rigida quadrata

Le condizioni al contorno (c.c.) sugli spostamenti al contorno assumono la forma seguente:

$$\begin{cases} k\varphi(\sigma) - \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)}\overline{\varphi'(\sigma)} - \overline{\psi(\sigma)} = 0 \\ k\overline{\varphi(\sigma)} - \frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(\sigma)}\varphi'(\sigma) - \psi(\sigma) = 0 \end{cases} ; \quad (5.65)$$

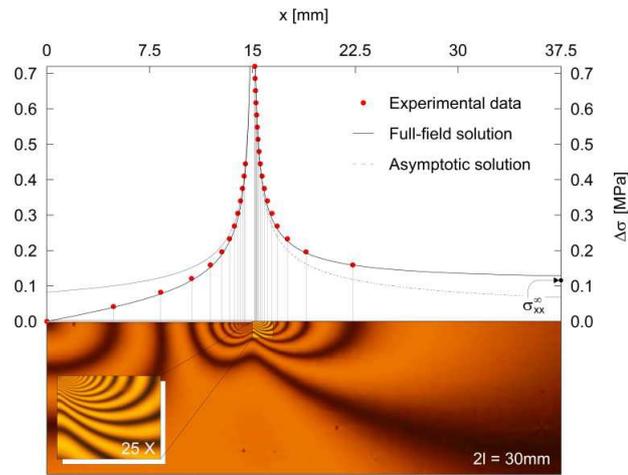


Figura 5.18: Differenza dei stress principali lungo l'asse dell'inclusione sottile rigida, la singolarità predetta dal modello elastico lineare coglie il comportamento osservato sperimentalmente mediante la tecnica della fotoelasticità.

se si valuta il conformal function della Figura 5.15 sul contorno  $\sigma = e^{i\theta}$  del cerchio di raggio unitario si ottiene

$$\omega(\sigma) = R \left( \frac{1}{\sigma} + e_1 \sigma^3 \right)$$

con

$$\overline{\omega(\sigma)} = R \left( \sigma + e_1 \frac{1}{\sigma^3} \right)$$

$$\omega'(\sigma) = R \left( -\frac{1}{\sigma^2} + 3e_1 \sigma^2 \right)$$

$$\overline{\omega'(\sigma)} = R \left( -\sigma^2 + 3e_1 \frac{1}{\sigma^2} \right)$$

da cui si calcolano le seguenti grandezze

$$\frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} = \frac{\sigma + e_1 \sigma^5}{3e_1 - \sigma^4},$$

$$\frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\overline{\omega'(\sigma)}} = -\frac{e_1 + \sigma^4}{\sigma - 3e_1 \sigma^5}.$$

Inoltre dalle equazioni in forma generale dei potenziali complessi si trova

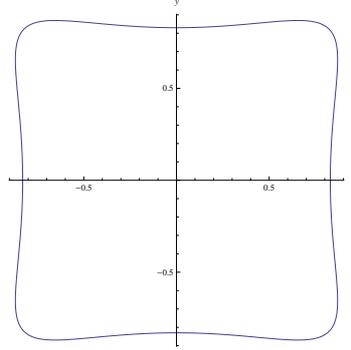


Figura 5.19: Quadrato approssimato ottenuto con primi 2 termini del polinomio

$$\begin{cases} \varphi(\zeta) = \Gamma\omega(\zeta) + \varphi^*(\zeta) \\ \psi(\zeta) = \Gamma'\omega(\zeta) + \psi^*(\zeta) \end{cases} \quad (5.66)$$

ove  $\varphi^*(\zeta)$  e  $\psi^*(\zeta)$  sono funzioni olomorfe fuori dal cerchio di raggio unitario contenuto nel piano infinito e hanno la forma

$$\begin{aligned} \varphi^*(\zeta) &= \sum_{n=1}^{\infty} a^n \zeta^n, \\ \psi^*(\zeta) &= \sum_{n=1}^{\infty} b^n \zeta^n. \end{aligned}$$

Sostituendo  $\omega(\sigma) = R \left( \frac{1}{\sigma} + e_1 \sigma^3 \right)$  nelle equazioni in forma generale dei potenziali complessi si ottiene

$$\begin{cases} \varphi(\sigma) = \Gamma \left[ R \left( \frac{1}{\sigma} + e_1 \sigma^3 \right) \right] + \varphi^*(\sigma) \\ \psi(\sigma) = \Gamma' \left[ R \left( \frac{1}{\sigma} + e_1 \sigma^3 \right) \right] + \psi^*(\sigma) \end{cases} \quad (5.67)$$

da cui, considerando le funzioni olomorfe dentro e fuori del cerchio unitario

$$\begin{cases} \varphi(\sigma) = \frac{\Gamma R}{\sigma} + \Gamma R e_1 \sigma^3 + \varphi^*(\sigma) \\ \psi(\sigma) = \frac{\Gamma' R}{\sigma} + \Gamma' R e_1 \sigma^3 + \psi^*(\sigma) \end{cases} \quad (5.68)$$

ed infine

$$\begin{cases} \varphi(\sigma) = \frac{\Gamma R}{\sigma} + \varphi_1(\sigma) \\ \psi(\sigma) = \frac{\Gamma' R}{\sigma} + \psi_1(\sigma) \end{cases} ; \quad (5.69)$$

si noti che  $\varphi_1(\sigma)$  e  $\psi_1(\sigma)$  sono olomorfe dentro al cerchio di raggio unitario. Inoltre si calcolano seguenti grandezze

- $\overline{\varphi(\sigma)} = \Gamma R\sigma + \overline{\varphi_1(\sigma)}$
- $\overline{\psi(\sigma)} = \Gamma' R\sigma + \overline{\psi_1(\sigma)}$
- $\varphi'(\sigma) = -\frac{\Gamma R}{\sigma^2} + \varphi_1'(\sigma)$
- $\overline{\varphi'(\sigma)} = -\Gamma R\sigma^2 + \overline{\varphi_1'(\sigma)}$

che sostituite nelle c.c. portano a

$$k\frac{\Gamma R}{\sigma} + k\varphi_1(\sigma) - \frac{\sigma + e_1\sigma^5}{3e_1 - \sigma^4} \left[ -\Gamma R\sigma^2 + \overline{\varphi_1'(\sigma)} \right] - \Gamma' R\sigma - \overline{\psi_1(\sigma)} = 0 \quad (5.70)$$

che integrata secondo Cauchy

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \left[ k\frac{\Gamma R}{\sigma} + k\varphi_1(\sigma) - \frac{\sigma + e_1\sigma^5}{3e_1 - \sigma^4} \left[ -\Gamma R\sigma^2 + \overline{\varphi_1'(\sigma)} \right] - \Gamma' R\sigma - \overline{\psi_1(\sigma)} \right] \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} = 0 \quad (5.71)$$

porta, come svolto in precedenza nel caso di inclusione ellittica, a

$$k\varphi_1(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \left[ k\frac{\Gamma R}{\sigma} - \frac{\sigma + e_1\sigma^5}{3e_1 - \sigma^4} \left[ -\Gamma R\sigma^2 + \overline{\varphi_1'(\sigma)} \right] - \Gamma' R\sigma - \overline{\psi_1(\sigma)} \right] \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} \quad (5.72)$$

da cui

$$k\varphi_1(\zeta) - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \left[ \frac{\sigma + e_1\sigma^5}{3e_1 - \sigma^4} \overline{\varphi_1'(\sigma)} \right] \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} = \Gamma' R\zeta - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \left[ \frac{\sigma + e_1\sigma^5}{3e_1 - \sigma^4} (\Gamma R\sigma^2) \right] \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta}. \quad (5.73)$$

Sapendo che  $\varphi_1(\zeta)$  è olomorfa dentro il cerchio e quindi viene descritta con la serie di potenze positive, l'arresto della serie avviene per  $n = 3$  in quanto  $n$  deve essere uguale alla potenza massima del *conformal function* (i.e.  $\omega(\zeta) = R\left(\frac{1}{\zeta} + e_1\zeta^3\right)$ ) essa può essere descritta nel seguente modo

$$\varphi_1(\zeta) = \sum_{n=1}^3 a^n \zeta^n = a_1\zeta + a_2\zeta^2 + a_3\zeta^3 \quad (5.74)$$

da cui si può calcolare

- $\varphi_1(\sigma) = a_1\sigma + a_2\sigma^2 + a_3\sigma^3$

- $\varphi'_1(\sigma) = a_1 + 2a_2\sigma + 3a_3\sigma^2$
- $\overline{\varphi'_1(\sigma)} = \overline{a_1} + \frac{2\overline{a_2}}{\sigma} + \frac{3\overline{a_3}}{\sigma^2}$ .

Inoltre il primo dei due l'integrali dell'eq. (5.73) risolto con gli integrali di Cauchy dà come risultato

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \left[ \frac{\sigma + e_1\sigma^5}{3e_1 - \sigma^4} \overline{\varphi'_1(\sigma)} \right] \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \left[ \frac{\sigma + e_1\sigma^5}{3e_1 - \sigma^4} \left( \overline{a_1} + \frac{2\overline{a_2}}{\sigma} + \frac{3\overline{a_3}}{\sigma^2} \right) \right] \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} \\ \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \left[ \frac{\sigma + e_1\sigma^5}{3e_1 - \sigma^4} (\overline{a_1}) \right] \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} &= \overline{a_1} [-e_1\zeta + f_1(\zeta)] \\ \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \left[ \frac{\sigma + e_1\sigma^5}{3e_1 - \sigma^4} \left( \frac{2\overline{a_2}}{\sigma} \right) \right] \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} &= 2\overline{a_2} [-e_1 + f_2(\zeta)] \\ \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \left[ \frac{\sigma + e_1\sigma^5}{3e_1 - \sigma^4} \left( \frac{3\overline{a_3}}{\sigma^2} \right) \right] \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} &= 3\overline{a_3} [0 + f_3(\zeta)] \end{aligned}$$

mentre il secondo dei due l'integrali dell'eq. (5.73) risolto con gli integrali di Cauchy dà come risultato

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \left[ \frac{\sigma + e_1\sigma^5}{3e_1 - \sigma^4} (\Gamma R \sigma^2) \right] \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} = \Gamma R [(-e_1)\zeta^3 - f_4(\zeta)]. \quad (5.75)$$

Si osservi che  $f_1(\zeta) \neq f_2(\zeta) \neq f_3(\zeta) \neq f_4(\zeta)$  e quindi l'integrale risulta essere

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \left[ \frac{\sigma + e_1\sigma^5}{3e_1 - \sigma^4} \left( \overline{a_1} + \frac{2\overline{a_2}}{\sigma} + \frac{3\overline{a_3}}{\sigma^2} \right) \right] \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} = \overline{a_1} (-e_1)\zeta + 2\overline{a_2} (-e_1) \quad (5.76)$$

$$k (a_1\zeta + a_2\zeta^2 + a_3\zeta^3) + \overline{a_1} (e_1)\zeta + 2\overline{a_2} (e_1) = \Gamma R (e_1)\zeta^3 + \Gamma' R \zeta \quad (5.77)$$

confrontando le pari potenze a destra e sinistra dell' equazione sovradescritta si ottiene il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} ka_1 + \overline{a_1} = \Gamma' R \\ ka_2 = 0 \\ ka_3 = \Gamma R e_1 \end{cases} . \quad (5.78)$$

Si noti che  $\overline{a_1} = a_{11} + a_{12}i$  è una costante complessa. Si ricavano quindi le costanti

- $a_1 = \frac{\Gamma'R}{k+e_1}$
- $a_2 = 0$
- $a_3 = \frac{\Gamma Re_1}{k}$

e si ottiene

$$\varphi_1(\zeta) = \frac{\Gamma'R}{k+e_1}\zeta + \frac{\Gamma Re_1}{k}\zeta^3 \quad (5.79)$$

per cui

$$\varphi(\zeta) = \frac{\Gamma R}{\zeta} + \frac{\Gamma'R}{k+e_1}\zeta + \frac{\Gamma Re_1}{k}\zeta^3. \quad (5.80)$$

Seguendo lo stesso procedimento visto in precedenza, con la seconda c.c. si ottiene

$$\psi_1(\zeta) = k\Gamma R\zeta + R\Gamma \left[ \frac{\zeta + 3e_1^2\zeta}{-1 + 3e_1\zeta^4} \right] - \frac{R\Gamma'}{k+e_1} \left[ \frac{(1 + 3e_1^2)\zeta^3}{-1 + 3e_1\zeta^4} \right] - \frac{R\Gamma}{k} \left[ \zeta + \frac{(1 + 3e_1^2)\zeta}{-1 + 3e_1\zeta^4} \right] \quad (5.81)$$

ed infine

$$\psi(\zeta) = \frac{\Gamma R}{\zeta} + k\Gamma R\zeta + R\Gamma \left[ \frac{\zeta + 3e_1^2\zeta}{-1 + 3e_1\zeta^4} \right] - \frac{R\Gamma'}{k+e_1} \left[ \frac{(1 + 3e_1^2)\zeta^3}{-1 + 3e_1\zeta^4} \right] - \frac{R\Gamma}{k} \left[ \zeta + \frac{(1 + 3e_1^2)\zeta}{-1 + 3e_1\zeta^4} \right]. \quad (5.82)$$

Si ricorda che

$$\begin{cases} \Gamma = \frac{\sigma_{xx}^\infty + \sigma_{yy}^\infty}{4} \\ \Gamma' = \frac{-\sigma_{xx}^\infty + \sigma_{yy}^\infty}{2} + i\sigma_{xy}^\infty \end{cases} \quad (5.83)$$

e quindi si può procedere con il calcolo del campo degli sforzi attraverso le equazioni seguenti

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = Re \left[ \frac{2\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} + \frac{\psi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} + \frac{\overline{\omega(\zeta)}}{\omega(\zeta)^3} (\varphi''(\zeta)\omega'(\zeta) - \varphi'(\zeta)\omega''(\zeta)) \right] \\ \sigma_{yy} = Re \left[ \frac{2\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} - \frac{\psi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} - \frac{\overline{\omega(\zeta)}}{\omega(\zeta)^3} (\varphi''(\zeta)\omega'(\zeta) - \varphi'(\zeta)\omega''(\zeta)) \right] \\ \sigma_{xy} = Im \left[ \frac{\psi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} + \frac{\overline{\omega(\zeta)}}{\omega(\zeta)^3} (\varphi''(\zeta)\omega'(\zeta) - \varphi'(\zeta)\omega''(\zeta)) \right] \end{cases} \quad (5.84)$$

### 5.7.1.1 Confronto qualitativo tra risultato analitico e sperimentale

Il risultato analitico ricavato si con il metodo dei potenziali complessi permette il calcolo del campo degli sforzi dagli quali si possono ottenere le tensioni principali massima e minima ed il deviatore.

- Tensione principale massima

$$\sigma_I = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\sigma_{xy}^2} \quad (5.85)$$

- Tensione principale minima

$$\sigma_{II} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\sigma_{xy}^2} \quad (5.86)$$

- Il deviatore

$$\sigma_I - \sigma_{II} = \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\sigma_{xy}^2} \quad (5.87)$$

Per quanto riguarda invece il risultato sperimentale è stato ottenuto con la tecnica della fotoelasticità. Come si può evincere dalla Figura 5.20 i due risultati pressoché coincidono.

## 5.8 Inclusione romboidale

Si considera un piano infinito contenente l'inclusione rigida di forma quadratica, il *conformal function* approssimato prendendo i primi due termini del polinomio che trasforma il rombo in un disco di raggio unitario come mostrato nella Figura 5.11 è

$$\omega(\zeta) = R \left( \frac{1}{\zeta} + e_1\zeta + e_2\zeta^3 \right)$$

ove le costanti reali valgono  $e_1 = -\frac{2}{3}$  e  $e_2 = \frac{5}{54}$ .

Graficamente si ottiene la seguente figura

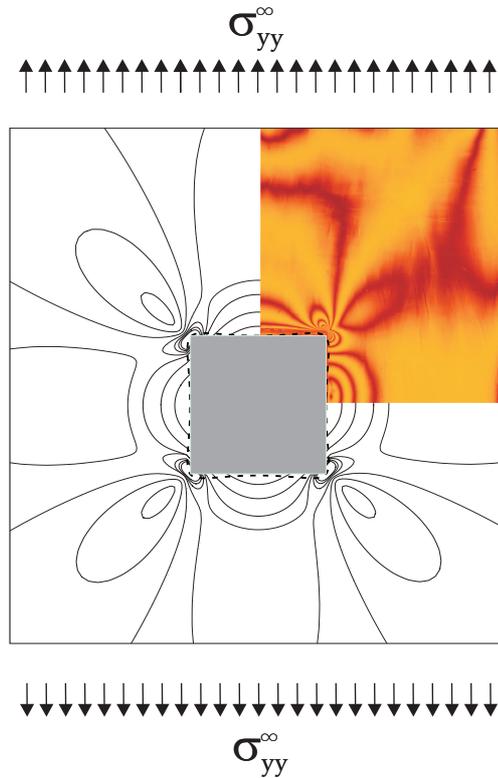


Figura 5.20: Confronto qualitativo tra il deviatore degli stress analitico e sperimentale con  $\nu = 0.48$

### 5.8.1 Inclusione rigida romboidale

Le condizioni al contorno (c.c.) sugli spostamenti al contorno prendono la forma seguente:

$$\begin{cases} k\varphi(\sigma) - \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)}\overline{\varphi'(\sigma)} - \overline{\psi(\sigma)} = 0 \\ k\overline{\varphi(\sigma)} - \frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\overline{\omega'(\sigma)}}\varphi'(\sigma) - \psi(\sigma) = 0 \end{cases} ; \quad (5.88)$$

se si valuta il conformal function della Figura 5.15 sul contorno  $\sigma = e^{i\theta}$  del cerchio di raggio unitario si ottiene

$$\omega(\sigma) = R \left( \frac{1}{\sigma} + e_1\sigma + e_2\sigma^3 \right)$$

con

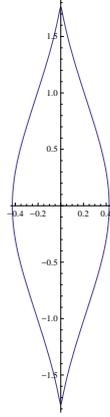


Figura 5.21: Rombo approssimato ottenuto con primi 3 termini del polinomio

- $\overline{\omega(\sigma)} = R\left(\sigma + e_1 \frac{1}{\sigma} + e_2 \frac{1}{\sigma^3}\right)$
- $\omega'(\sigma) = R\left(-\frac{1}{\sigma^2} + e_1 + 3e_2 \sigma^2\right)$
- $\overline{\omega'(\sigma)} = R\left(-\sigma^2 + e_1 + 3e_2 \frac{1}{\sigma^2}\right)$

da cui si calcolano seguenti grandezze

$$\frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} = \frac{\sigma + e_1 \sigma^3 + e_2 \sigma^5}{-\sigma^4 + e_1 \sigma^2 - 3e_2},$$

$$\frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\overline{\omega'(\sigma)}} = \frac{\sigma^4 + e_1 \sigma^2 + e_2}{-\sigma + e_1 \sigma^3 + 3e_2 \sigma^5}.$$

Inoltre dalle equazioni in forma generale dei potenziali complessi si trova

$$\begin{cases} \varphi(\zeta) = \Gamma \omega(\zeta) + \varphi^*(\zeta) \\ \psi(\zeta) = \Gamma' \omega(\zeta) + \psi^*(\zeta) \end{cases} \quad (5.89)$$

ove  $\varphi^*(\zeta)$  e  $\psi^*(\zeta)$  sono funzioni olomorfe dentro al cerchio di raggio unitario contenuto nel piano infinito e hanno la forma

$$\varphi^*(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} a^n \zeta^n,$$

$$\psi^*(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} b^n \zeta^n.$$

Sostituendo  $\omega(\sigma) = R\left(\frac{1}{\sigma} + e_1 \sigma^3\right)$  nelle equazioni in forma generale dei potenziali complessi si ottiene

$$\begin{cases} \varphi(\sigma) = \Gamma R \left[ \left( \frac{1}{\sigma} + e_1 \sigma + e_2 \sigma^3 \right) \right] + \varphi^*(\sigma) \\ \psi(\sigma) = \Gamma' R \left[ \left( \frac{1}{\sigma} + e_1 \sigma + e_2 \sigma^3 \right) \right] + \psi^*(\sigma) \end{cases} \quad (5.90)$$

da cui, come svolto in precedenza

$$\begin{cases} \varphi(\sigma) = \frac{\Gamma R}{\sigma} + \Gamma R [e_1 \sigma + e_2 \sigma^3] + \varphi^*(\sigma) \\ \psi(\sigma) = \frac{\Gamma' R}{\sigma} + \Gamma' [e_1 \sigma + e_2 \sigma^3] + \psi^*(\sigma) \end{cases} \quad (5.91)$$

per ottenere

$$\begin{cases} \varphi(\sigma) = \frac{\Gamma R}{\sigma} + \varphi_1(\sigma) \\ \psi(\sigma) = \frac{\Gamma' R}{\sigma} + \psi_1(\sigma) \end{cases} ; \quad (5.92)$$

si noti che  $\varphi_1(\sigma)$  e  $\psi_1(\sigma)$  sono olomorfe dentro al cerchio di raggio unitario. Inoltre si calcolano seguenti grandezze

$$\begin{aligned} \overline{\varphi(\sigma)} &= \Gamma R \sigma + \overline{\varphi_1(\sigma)} \\ \overline{\psi(\sigma)} &= \Gamma' R \sigma + \overline{\psi_1(\sigma)} \\ \varphi'(\sigma) &= -\frac{\Gamma R}{\sigma^2} + \varphi_1'(\sigma) \\ \overline{\varphi'(\sigma)} &= -\Gamma R \sigma^2 + \overline{\varphi_1'(\sigma)} \end{aligned}$$

e sostituendo le ultime nelle condizioni al contorno si giunge a

$$k \frac{\Gamma R}{\sigma} + k \varphi_1(\sigma) - \frac{\sigma + e_1 \sigma^3 + e_2 \sigma^5}{-\sigma^4 + e_1 \sigma^2 - 3e_2} \left[ -\Gamma R \sigma^2 + \overline{\varphi_1'(\sigma)} \right] - \Gamma' R \sigma - \overline{\psi_1(\sigma)} = 0. \quad (5.93)$$

Integrando quest'ultima secondo Cauchy

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \left[ k \frac{\Gamma R}{\sigma} + k \varphi_1(\sigma) - \frac{\sigma + e_1 \sigma^3 + e_2 \sigma^5}{-\sigma^4 + e_1 \sigma^2 - 3e_2} \left[ -\Gamma R \sigma^2 + \overline{\varphi_1'(\sigma)} \right] + \right. \\ \left. - \Gamma' R \sigma - \overline{\psi_1(\sigma)} \right] \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} = 0, \end{aligned} \quad (5.94)$$

una volta ricordati i teoremi di Cauchy precedentemente enunciati si ha

$$\begin{aligned} k \varphi_1(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \left[ k \frac{\Gamma R}{\sigma} - \frac{\sigma + e_1 \sigma^3 + e_2 \sigma^5}{-\sigma^4 + e_1 \sigma^2 - 3e_2} \left[ -\Gamma R \sigma^2 + \overline{\varphi_1'(\sigma)} \right] + \right. \\ \left. - \Gamma' R \sigma - \overline{\psi_1(\sigma)} \right] \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} \end{aligned} \quad (5.95)$$

da cui segue

$$k\varphi_1(\zeta) - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \left[ \frac{\sigma + e_1\sigma^3 + e_2\sigma^5}{-\sigma^4 + e_1\sigma^2 - 3e_2} \overline{\varphi_1'(\sigma)} \right] \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} = \Gamma' R \zeta - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \left[ \frac{\sigma + e_1\sigma^3 + e_2\sigma^5}{-\sigma^4 + e_1\sigma^2 - 3e_2} (\Gamma R \sigma^2) \right] \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} \quad (5.96)$$

Dato che  $\varphi_1(\zeta)$  è olomorfa dentro il cerchio, essa viene descritta con la serie di potenze positive, e l'arresto della serie avviene per  $n = 3$  in quanto  $n$  deve essere uguale alla potenza massima del *conformal function* (i.e.  $\omega(\zeta) = R\left(\frac{1}{\zeta} + e_1\zeta^3\right)$ ):

$$\varphi_1(\zeta) = \sum_{n=1}^3 a^n \zeta^n = a_1 \zeta + a_2 \zeta^2 + a_3 \zeta^3 \quad (5.97)$$

da cui si può calcolare

- $\varphi_1(\sigma) = a_1\sigma + a_2\sigma^2 + a_3\sigma^3$
- $\varphi_1'(\sigma) = a_1 + 2a_2\sigma + 3a_3\sigma^2$
- $\overline{\varphi_1'(\sigma)} = \overline{a_1} + \frac{2\overline{a_2}}{\sigma} + \frac{3\overline{a_3}}{\sigma^2}$

Infine il primo dei due l'integrali dell'eq. (5.96) risolti mediante l'uso degli integrali di Cauchy danno come risultato

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \left[ \frac{\sigma + e_1\sigma^3 + e_2\sigma^5}{-\sigma^4 + e_1\sigma^2 - 3e_2} \overline{\varphi_1'(\sigma)} \right] \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} = \\ & \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \left[ \frac{\sigma + e_1\sigma^3 + e_2\sigma^5}{-\sigma^4 + e_1\sigma^2 - 3e_2} \left( \overline{a_1} + \frac{2\overline{a_2}}{\sigma} + \frac{3\overline{a_3}}{\sigma^2} \right) \right] \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} \\ & \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \left[ \frac{\sigma + e_1\sigma^3 + e_2\sigma^5}{-\sigma^4 + e_1\sigma^2 - 3e_2} (\overline{a_1}) \right] \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} = \overline{a_1} [-e_2\zeta + f_1(\zeta)] \\ & \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \left[ \frac{\sigma + e_1\sigma^3 + e_2\sigma^5}{-\sigma^4 + e_1\sigma^2 - 3e_2} \left( \frac{2\overline{a_2}}{\sigma} \right) \right] \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} = 2\overline{a_2} [-e_2 + f_2(\zeta)] \\ & \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \left[ \frac{\sigma + e_1\sigma^3 + e_2\sigma^5}{-\sigma^4 + e_1\sigma^2 - 3e_2} \left( \frac{3\overline{a_3}}{\sigma^2} \right) \right] \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} = 3\overline{a_3} [0 + f_3(\zeta)] \end{aligned}$$

mentre il secondo dei due l'integrali dall'eq. (5.96) porta a

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \left[ \frac{\sigma + e_1\sigma^3 + e_2\sigma^5}{-\sigma^4 + e_1\sigma^2 - 3e_2} (\Gamma R \sigma^2) \right] \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} = \Gamma R [-e_1(1 + e_2)\zeta - e_2\zeta^3 + f_4(\zeta)]. \quad (5.98)$$

Si nota che  $f_1(\zeta) \neq f_2(\zeta) \neq f_3(\zeta) \neq f_4(\zeta)$  non sono confrontabili come potenze, quindi l'integrale risulta essere pari a

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \left[ \frac{\sigma + e_1\sigma^3 + e_2\sigma^5}{-\sigma^4 + e_1\sigma^2 - 3e_2} \left( \bar{a}_1 + \frac{2\bar{a}_2}{\sigma} + \frac{3\bar{a}_3}{\sigma^2} \right) \right] \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} = \bar{a}_1(-e_1)\zeta + 2\bar{a}_2(-e_1) \quad (5.99)$$

e di conseguenza

$$k(a_1\zeta + a_2\zeta^2 + a_3\zeta^3) + \bar{a}_1(e_2)\zeta + 2\bar{a}_2(e_2) = \Gamma R(e_2)\zeta^3 + [\Gamma'R + \Gamma Re_1(1 + e_2)]\zeta. \quad (5.100)$$

Se si confrontano le pari potenze a destra e sinistra dell'equazione precedente si ottiene un sistema lineare

$$\begin{cases} ka_1 + e_2\bar{a}_1 = R[\Gamma' + \Gamma e_1(1 + e_2)] \\ ka_2 = 0 \\ ka_3 = \Gamma Re_2 \end{cases} \quad (5.101)$$

con  $\bar{a}_1 = a_{11} + a_{12}i$  costante complessa. Si ricavano perciò le costanti

- $a_1 = \frac{R[\Gamma' + \Gamma e_1(1 + e_2)]}{k + e_2}$
- $a_2 = 0$
- $a_3 = \frac{\Gamma Re_2}{k}$

le quali permettono di scrivere

$$\varphi_1(\zeta) = \frac{R[\Gamma' + \Gamma e_1(1 + e_2)]}{k + e_2}\zeta + \frac{\Gamma Re_2}{k}\zeta^3 \quad (5.102)$$

ed infine giungere a

$$\varphi(\zeta) = \frac{\Gamma R}{\zeta} + \frac{R[\Gamma' + \Gamma e_1(1 + e_2)]}{k + e_2}\zeta + \frac{\Gamma Re_2}{k}\zeta^3. \quad (5.103)$$

Seguendo lo stesso procedimento visto in precedenza, con la seconda condizione al contorno si ha

$$\begin{aligned} \psi_1(\zeta) = & k\Gamma R\zeta - \frac{R\Gamma}{k}\zeta + R\Gamma \left[ \frac{\zeta + e_1^2\zeta + e_1^2e_2\zeta + 3e_1e_2\zeta^3 + 3e_1e_2^2\zeta^3}{-1 + e_1\zeta^2 + 3e_2\zeta^4} \right] + \\ & - \frac{R\Gamma}{k}\zeta - \frac{R[\Gamma' + \Gamma e_1(1 + e_2)]}{k + e_2} \left[ \frac{e_1\zeta + e_1e_2\zeta + \zeta^3 + 3e_2^2\zeta^3}{-1 + e_1\zeta^2 + 3e_2\zeta^4} \right] \end{aligned} \quad (5.104)$$

e di conseguenza

$$\psi(\zeta) = \frac{\Gamma'R}{\zeta} + k\Gamma R\zeta - \frac{R\Gamma}{k}\zeta + R\Gamma \left[ \frac{\zeta + e_1^2\zeta + e_1^2e_2\zeta + 3e_1e_2\zeta^3 + 3e_1e_2^2\zeta^3}{-1 + e_1\zeta^2 + 3e_2\zeta^4} \right] + \quad (5.105)$$

$$- \frac{R\Gamma}{k}\zeta - \frac{R[\Gamma' + \Gamma e_1(1 + e_2)]}{k + e_2} \left[ \frac{e_1\zeta + e_1e_2\zeta + \zeta^3 + 3e_2^2\zeta^3}{-1 + e_1\zeta^2 + 3e_2\zeta^4} \right].$$

Si ricorda che

$$\begin{cases} \Gamma = \frac{\sigma_{xx}^\infty + \sigma_{yy}^\infty}{2} \\ \Gamma' = \frac{-\sigma_{xx}^\infty + \sigma_{yy}^\infty}{2} + i\sigma_{xy}^\infty \end{cases} \quad (5.106)$$

così da calcolare il campo degli sforzi attraverso le equazioni seguenti

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = Re \left[ \frac{2\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} + \frac{\psi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} + \frac{\overline{\omega(\zeta)}}{\omega(\zeta)^3} (\varphi''(\zeta)\omega'(\zeta) - \varphi'(\zeta)\omega''(\zeta)) \right] \\ \sigma_{yy} = Re \left[ \frac{2\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} - \frac{\psi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} - \frac{\overline{\omega(\zeta)}}{\omega(\zeta)^3} (\varphi''(\zeta)\omega'(\zeta) - \varphi'(\zeta)\omega''(\zeta)) \right] \\ \sigma_{xy} = Im \left[ \frac{\psi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} + \frac{\overline{\omega(\zeta)}}{\omega(\zeta)^3} (\varphi''(\zeta)\omega'(\zeta) - \varphi'(\zeta)\omega''(\zeta)) \right] \end{cases} \quad (5.107)$$

### 5.8.1.1 Confronto qualitativo tra risultato analitico e sperimentale

Il risultato analitico ricavatosi con il metodo dei potenziali complessi permette il calcolo del campo degli sforzi dai quali si possono ottenere le tensioni principali massima e minima ed il deviatore.

- Tensione principale massima

$$\sigma_I = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\sigma_{xy}^2} \quad (5.108)$$

- Tensione principale minima

$$\sigma_{II} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\sigma_{xy}^2} \quad (5.109)$$

- Il deviatore

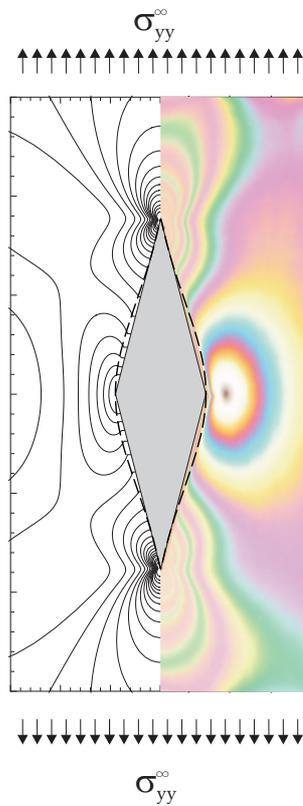


Figura 5.22: Confronto tra la differenza delle tensioni principali analitico e sperimentale con  $\nu=0.48$  in stato piano di deformazione

$$\sigma_I - \sigma_{II} = \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\sigma_{xy}^2} \quad (5.110)$$

Per quanto riguarda invece il risultato sperimentale è stato ottenuto con la tecnica della fotoelasticità. Come si può evincere dalla Figura 1.1 che i due risultati pressoché coincidono.



## Capitolo 6

# Conclusioni

L'approccio analitico che è stato implementato si basa sul metodo dei potenziali complessi per elasticità piana nel caso di materiali elastici definiti da un legame costitutivo locale. Sono stati trovati i fattori di concentrazione degli sforzi nei punti notevoli nel caso di geometrie semplici (i.e. inclusione circolare rigida e vuota) e geometrie complesse, in particolare inclusione rigida ellittica, quadratica e romboidale.

E' stato dimostrato che nel caso dell'inclusione circolare vuota (foro) in un piano infinito e caricato all'infinito, il fattore di concentrazione degli sforzi vale 3 localizzato in  $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$  e  $r \rightarrow a$  ove  $a$  è il raggio del cerchio e vale  $-1$  in  $\theta \rightarrow 0$  e  $r \rightarrow a$ . D'altra parte, nel caso dell'inclusione circolare rigida, il fattore di concentrazione degli sforzi vale  $-0.067$  e  $1.467$  nei punti notevoli indicati precedentemente. Di conseguenza si può dimostrare che la crisi del materiale avviene in  $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$  e  $r \rightarrow a$  nel caso di inclusione circolare vuota e in  $\theta \rightarrow 0$  e  $r \rightarrow a$  per il caso dell'inclusione rigida come mostrato nella Figura 6.1. Inoltre si nota che nel caso dell'inclusione rigida addirittura il materiale si scarica nel punto notevole  $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$  e  $r \rightarrow a$ .

Inoltre è stato fatto un confronto qualitativo fra i risultati analitici ottenuti mediante i potenziali complessi e tecnica del conformal mapping e i risultati sperimentali ottenuti con la fotoelasticità per l'inclusione rigida circolare, quadratica e romboidale. Per quanto riguarda invece l'inclusione rigida ellittica è stato fatto un confronto con la soluzione numerica ottenuta con il programma ad elementi finiti *Comsol Multiphysics 4.2a*, per la mancanza del risultato sperimentale. Si è visto che il deviatore degli stress in entrambi i risultati viene pressoché uguale, nonostante il risultato analitico contenga delle approssimazioni all'interno del procedimento analitico.

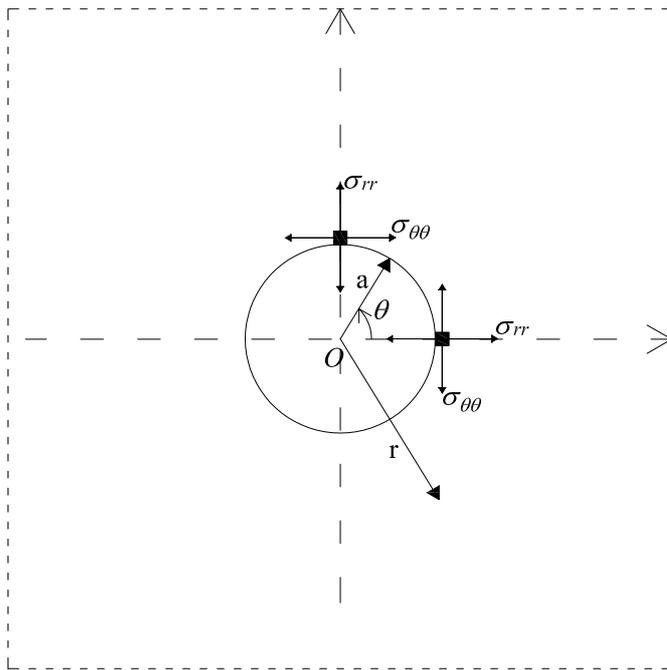


Figura 6.1: Tensioni principali nei punti notevoli nel caso di inclusione circolare rigida e vuota

# Bibliografia

- [1] M. H. Sadd (2005), ELASTICITY -THEORY, APPLICATIONS AND NUMERICS, Elsevier, Oxford.
- [2] G. N. Savin (1961), STRESS CONCENTRATION AROUND HOLES, Pergamon Press, London.
- [3] N. I. Muskhelishvili (1963), SOME BASIC PROBLEMS OF MATHEMATICAL THEORY OF ELASTICITY, P. Noordhoff Ltd, Groningen.
- [4] A. Piva, E. Viola (1993), SULLA FORMULAZIONE DELLE EQUAZIONI DELL'ELASTICITA' PIANA MEDIANTE I POTENZIALI COMPLESSI, Istituto di scienza delle costruzioni, Bologna.
- [5] A. Piva, E. Viola, H. Walid (1995), INTEGRALI DI TIPO CAUCHY E TRASFORMAZIONI CONFORMI, Istituto di scienza delle costruzioni, Bologna.
- [6] A. Piva, E. Viola, H. Walid (1997), METODI ANALITICI PER LA SOLUZIONE DI PROBLEMI AL CONTORNO IN ELASTICITA' PIANA, Istituto di scienza delle costruzioni, Bologna.
- [7] E. Viola, H. Walid (1981), IL METODO DEI POTENZIALI COMPLESSI NEI PROBLEMI DI ELASTICITA' PIANA, Istituto di scienza delle costruzioni, Pisa.
- [8] I. S. Sokolnikoff (1956), MATHEMATICAL THEORY OF ELASTICITY, McGraw-Hill, New York.
- [9] A. I. Markusevic(1988), ELEMENTI DI TEORIA DELLE FUNZIONI ANALITICHE, Edizioni Mir Editori Riuniti, Roma.
- [10] A. P. Boresi, K. P. Chong(2000), ELASTICITY IN ENGINEERING MECHANICS, John Wiley & Sons, Inc., Canada.

- [11] A. H. England(1971), COMPLEX VARIABLE METHODS IN ELASTICITY, John Wiley & Sons, Inc., London.
- [12] G. V. Kolosov(1909), ON THE APPLICATION OF COMPLEX FUNCTION THEORY TO A PLANE PROBLEM OF THE MATHEMATICAL THEORY OF ELASTICITY, Dorpat(Yuriev) University.
- [13] C. S. Chang, H. D. Conway, A PARAMETRIC STUDY OF THE COMPLEX VARIABLE METHOD FOR ANALYZING THE STRESSES IN AN INFINITE PLATE CONTAINING A RIGID RECTANGULAR INCLUSION(1968), International Journal of Solids Structures, 4: 1057-1066.
- [14] R. Schinzinger, P. A. A. Laura(1991), CONFORMAL MAPPING: METHODS AND APPLICATIONS, Elsevier, Amsterdam.
- [15] J. R. Barber(1992), ELASTICITY, kluwer Academic publishers, Dordrecht.