

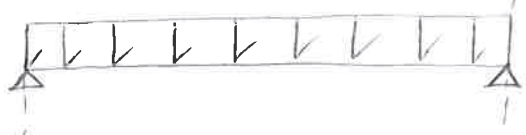
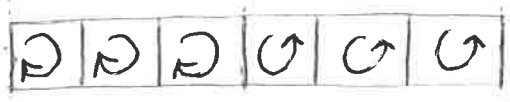
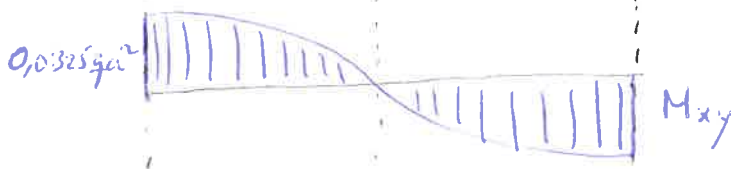
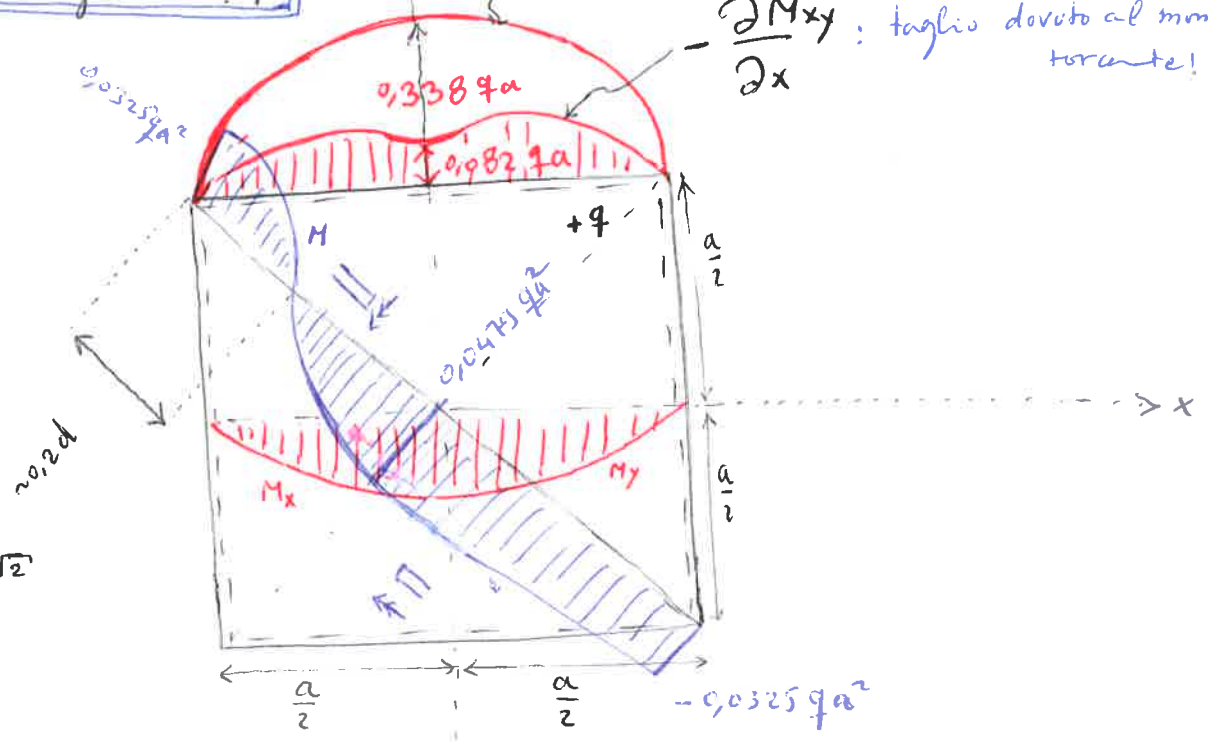
Limmer Struktur.

PIASTA Appoggiata con carico distribuito uniformemente q^+

$V_y = Q_y + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}$; Taglio di Kirchhoff

$-\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}$: taglio dovuto al momento torcente!

$d = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$

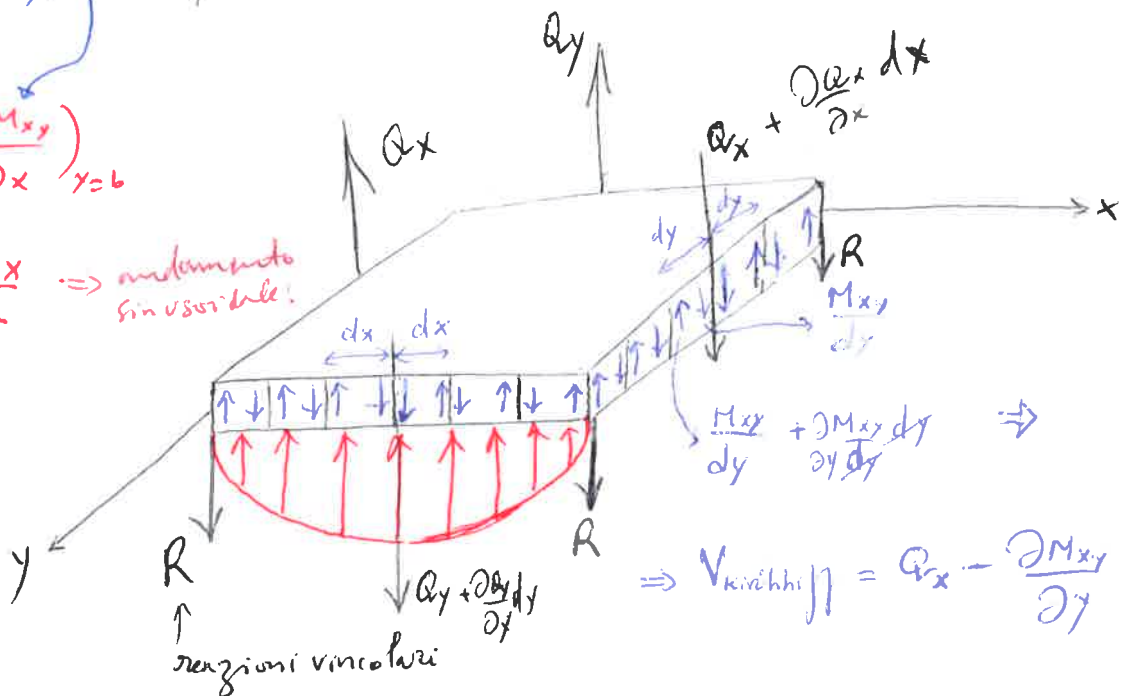


NO! con serie doppie (Navier)
trova la soluzione del $\nabla^4 w = \frac{q}{D}$
 $\Rightarrow w = \dots \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$
però quindi trovare M_{xy} e
 Q_x e Q_y e M_x e M_y .

$V_y = (Q_y + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x})_{x=b}$

$= C \cdot \sin \frac{\pi x}{a} \Rightarrow$ momento sin usabile!

$R = 2 M_{xy}$



• Le condizioni al contorno per le piastre semplicemente appoggiate:

Free edge : $(M_x)_{x=a} = 0$ $(M_{xy})_{x=a} = 0$ e $(Q_x)_{x=a} = 0$

3 c.c. by poisson

Kirchhoff : dice che bastano solo 2 c.c. perché il mom. torc. M_{xy} è staticamente equivalente a delle forze di taglio dell'intensità

$$Q'_x = - \left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right)_{x=a}$$

Quindi posso dire che:

$$V_x = \left(Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right)_{x=a} = 0$$

⇒ Sapendo che

$$\begin{cases} Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} (\Delta w) \\ M_{xy} = D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{cases}$$

$$\boxed{\Delta = \nabla^2}$$

momento flessione (c.c.)

$$\Rightarrow V_x = \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right]_{x=a} = 0 \quad (1)$$

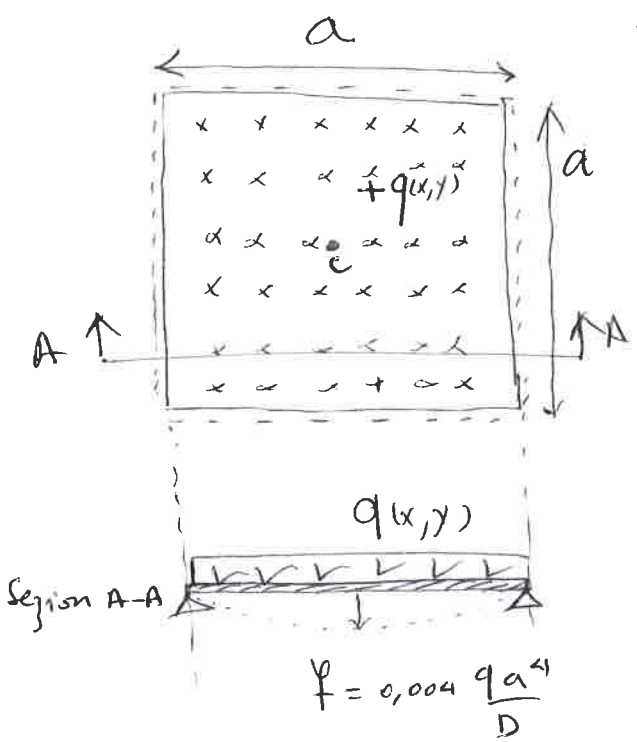
$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=a} = 0 \quad (2)$$

(1) e (2) sono 2 c.c. necessari per il contorno

libero!

NB! La riduzione delle c.c. non altera la soluzione globale ma solo distribuzione degli sforzi locali! ~~Attenzione!~~

STATO DI SOLLECITAZIONE IN UNA LASTRA QUADRATA CON CARICO DISTRIBUITO COSTANTE



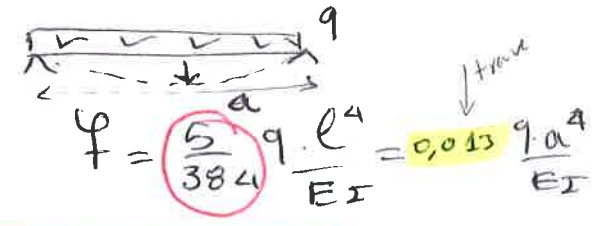
freccia nel centro della piastra.

$$\varphi = w_c(x,y) = \frac{1}{246} \frac{q \cdot a^4}{D} = 0,004 \frac{q \cdot a^4}{D}$$

$$D = \frac{E \cdot t^3}{12(1-\nu^2)}$$

: rigidità flessionale della piastra.

e.g. confronto con la freccia trave.



NB! $\varphi^{piastra} \approx 3,2 \varphi^{trave}$

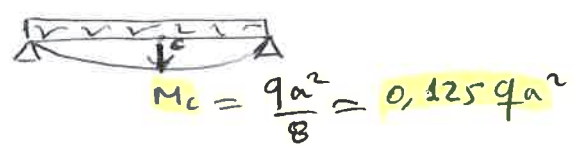
La piastra e' molto piu rigida!

→ calcolo momento in mezzuric e nello spigolo:

NB! $M_c = M_x^c = M_y^c = \frac{1+\nu}{27} q a^2$ con $\nu = 0,3$

⇒ $M_c \approx \frac{q a^2}{21} \approx 0,047 q a^2$

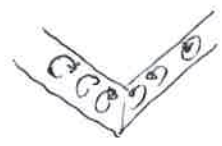
→ confronto con M_c^{trave}



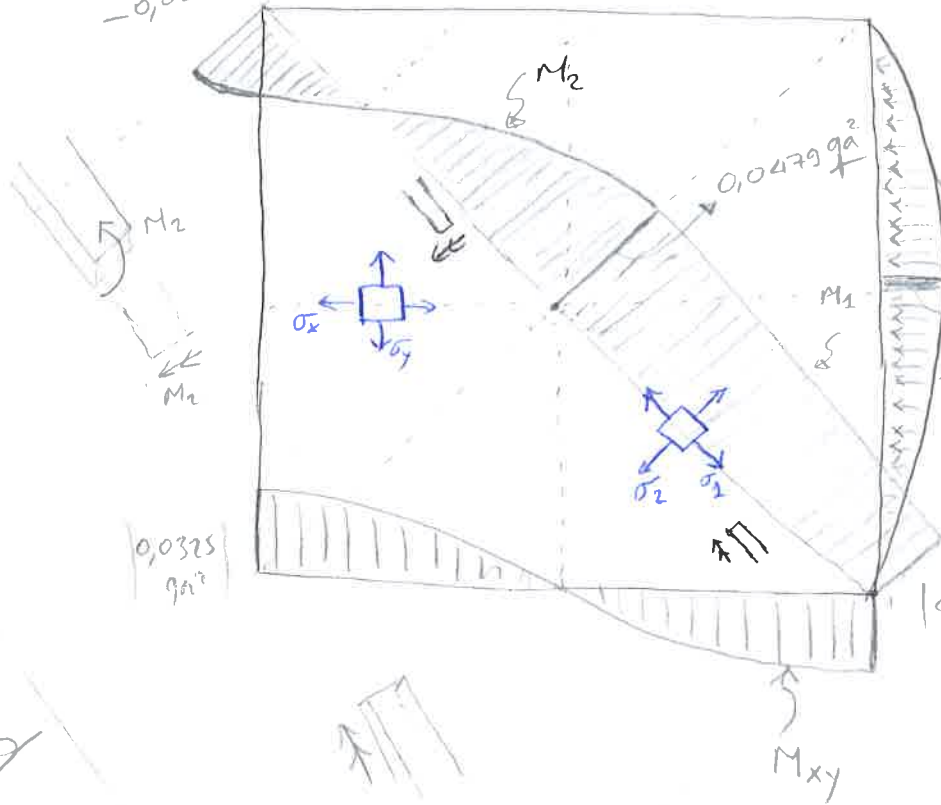
→ momento nello spigolo: $\nu = 0,3$

$M_{spigolo} = - \frac{(1-\nu) q a^2}{22} \approx - 0,032 q a^2$

NB! I momenti torcenti cercano di abbassare il momento sullo spigolo!



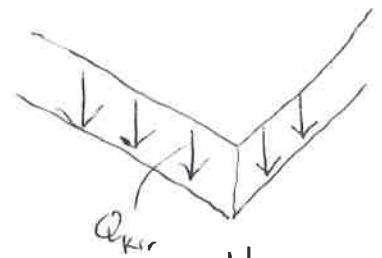
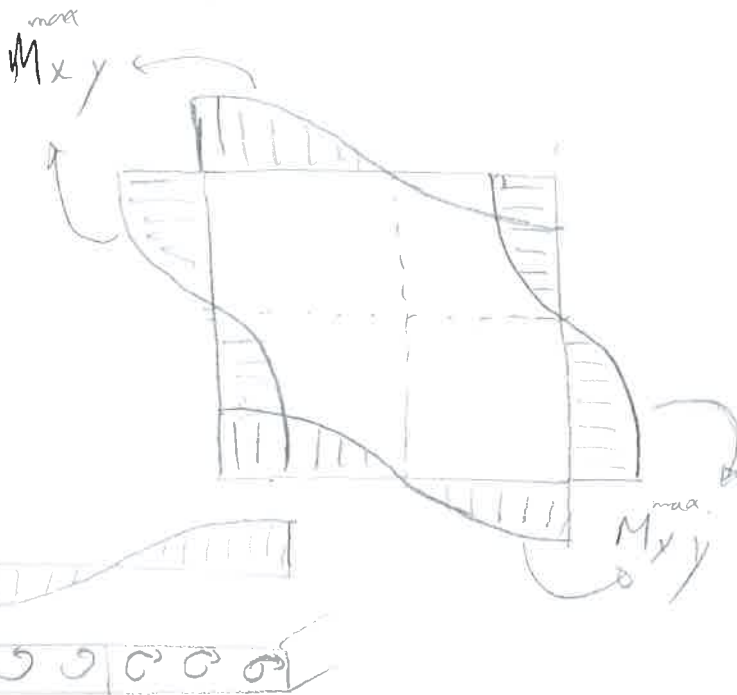
$-0,0325qa^2$: momento sullo spigolo. e' negativo!
 $(0,18 \div 0,2)d$



$$Q_{kirchhoff} = Q_y + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}$$

$$= Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}$$

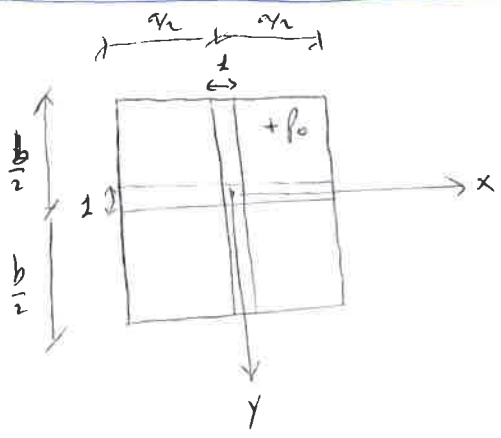
• N.B. $Q_{kirchhoff} = Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}$



$\Downarrow 2M_{spigolo}$
 forza concentrata si scarica sull'angolo!

NO! La piastra quadrata ha un comportamento più efficace e più rigida!

The STRIP METHOD o METODO di Girashov:



2 condizioni da soddisfare :=

$$W_a = W_b \quad \text{e} \quad P_0 = P_a + P_b \quad \text{in } x=y=0$$

$$\Rightarrow P_a = P_0 \frac{b^4}{a^4 + b^4} \quad ; \quad P_b = P_0 \frac{a^4}{a^4 + b^4}$$

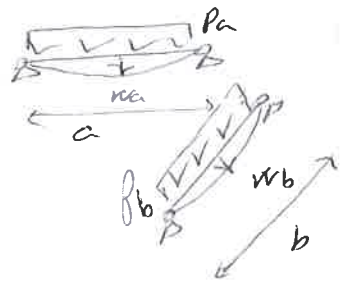
verifico

$$P_0 = \frac{P_0 b^4}{a^4 + b^4} + \frac{P_0 a^4}{a^4 + b^4} = P_0 \quad \checkmark$$

$$= P_a + P_b$$

le frecce in mezzaria

⇒ posso calcolare W_a e W_b dalla teoria della trave. e.g.



$$\begin{cases} W_a = \frac{5 P_a \cdot a^4}{384 EI} \\ W_b = \frac{5 P_b \cdot b^4}{384 EI} \end{cases}$$

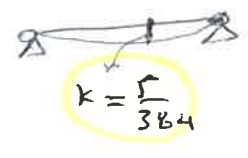
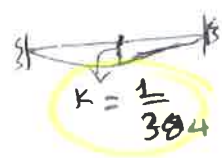
1) Invece per la piastra posso calcolare la freccia in mezzaria.

$$W^{max} = W_a = W_b = K_1 \frac{P_0 a^4}{D} \quad ; \quad D = \frac{E \cdot t^3}{12(1-\nu^2)}$$

$$W^{max} = K_1 \frac{P_0 \cdot a^4 b^4}{D (a^4 + b^4)}$$

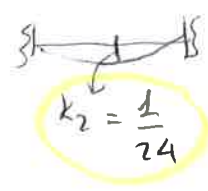
K_1 = costante dipende dal condizionamenti al contorno

2) posso calcolare anche i momenti in mezzaria.



$$\begin{cases} M_x = K_2 \cdot P_a \cdot a^2 = K_2 \frac{P_0 a^2 b^4}{a^4 + b^4} \\ M_y = K_2 \cdot P_b \cdot b^2 = K_2 \frac{P_0 a^4 b^2}{a^4 + b^4} \end{cases}$$

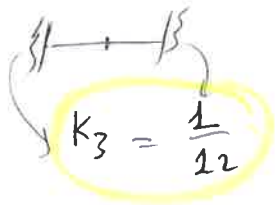
K_2 dipende da c.c.



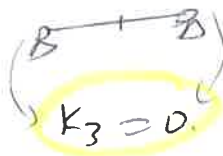
3) posso calcolare i momenti ai lati.

$$\left\{ \begin{aligned} M_x^{\text{lati}} &= K_3 \cdot p_0 \cdot a^2 = K_3 \frac{p_0 \cdot a^2 b^4}{a^4 + b^4} \\ M_y^{\text{lati}} &= K_3 \cdot p_0 \cdot a^2 = K_3 \frac{p_0 \cdot a^4 b^2}{a^4 + b^4} \end{aligned} \right.$$

K_3 dipende da c.c.

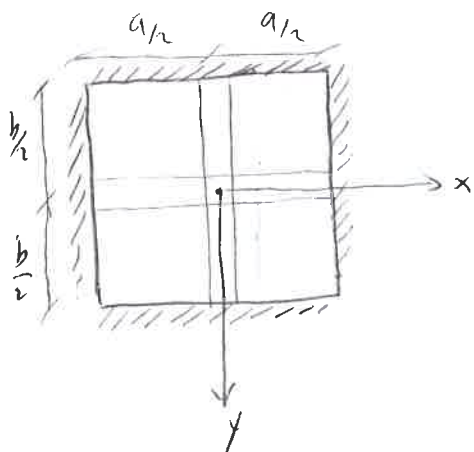


$$K_3 = \frac{1}{12}$$



$$K_3 = 0$$

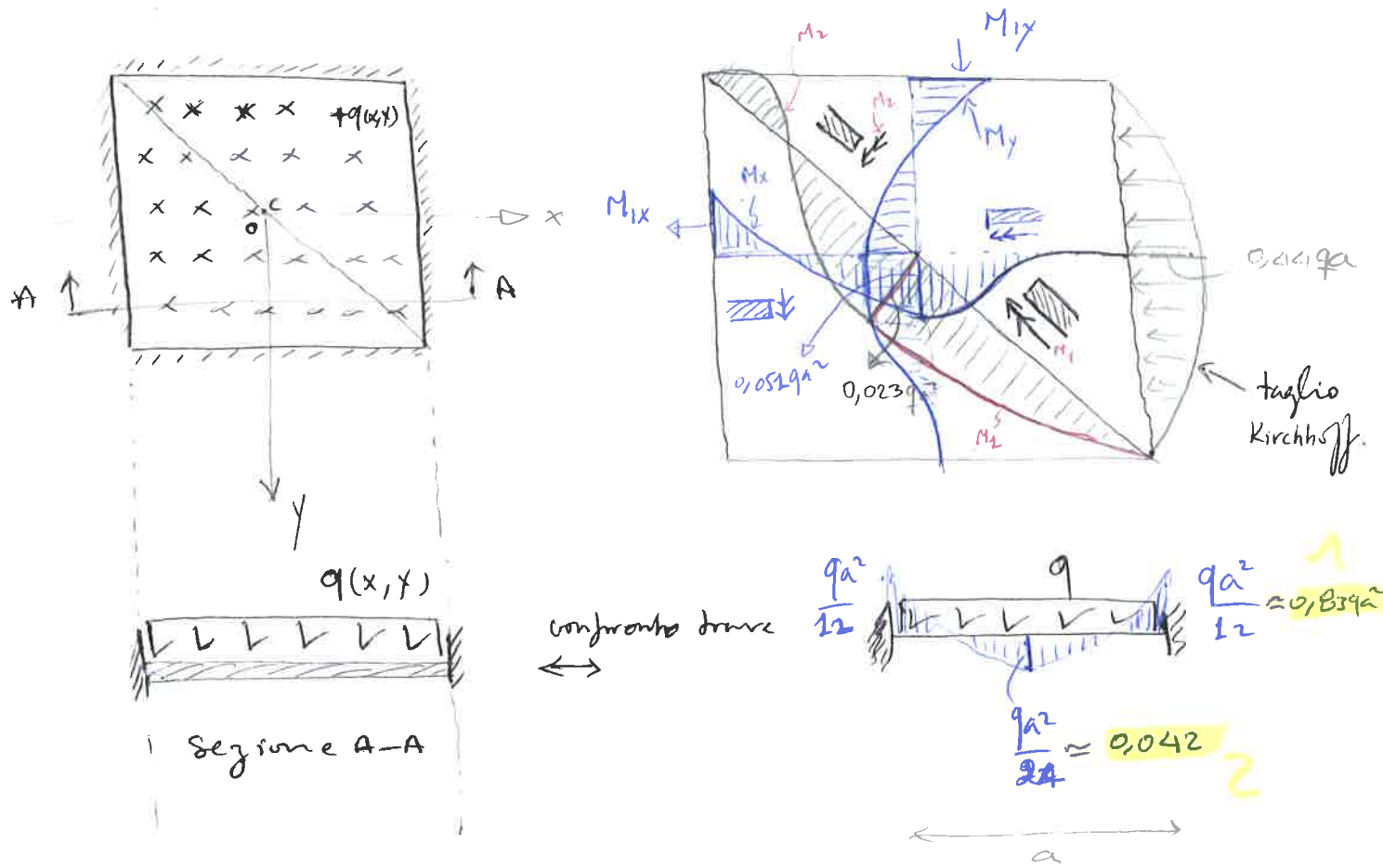
e.g. piastra quadrata incastrata:



$$W^{\text{max}} = 0,0023 \frac{p_0 a^4}{D}$$

in $x=0=y$.

"PIASTRA QUADRATA INCASTRATA"



NB! $M_{xy} = 0$!!! Momenti torcenti nulli!!!

$$M_c = 0,0178(1+\nu) \underset{0,13}{qa^2} = 0,023 qa^2$$

M_{ix} : momento sulli incastro che varia lungo x .

$$M_{ix} = M_{iy} = 0,051 qa^2$$

NB! Come per le travi: momenti in appoggio e' > momento in mezzanina!

NB! Grashoff sovrastima!

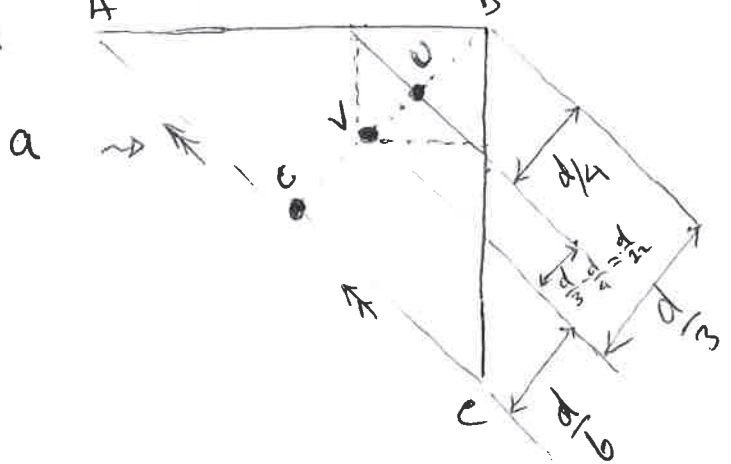
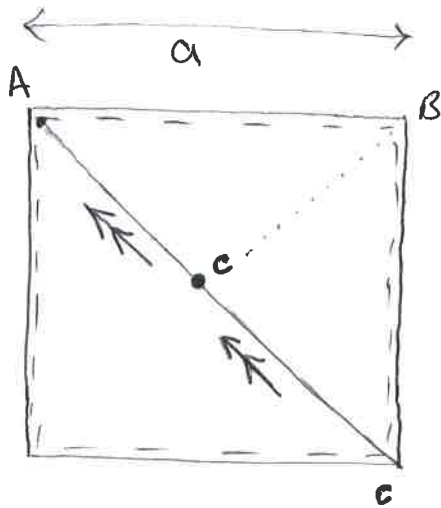
METODI Approssimati per le piastre:

METODO DI BACH: (1890)., consideriamo una piastra

quadrata appoggiata, prendiamo la diagonale
 e studiamo i momenti / lungo essa
 flettoni Longitudinali

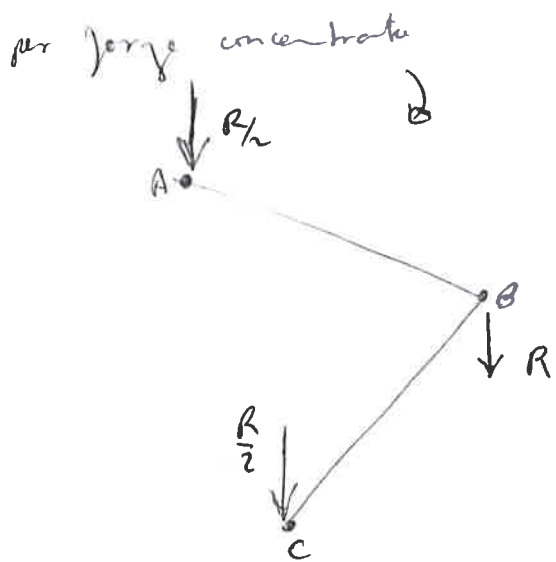
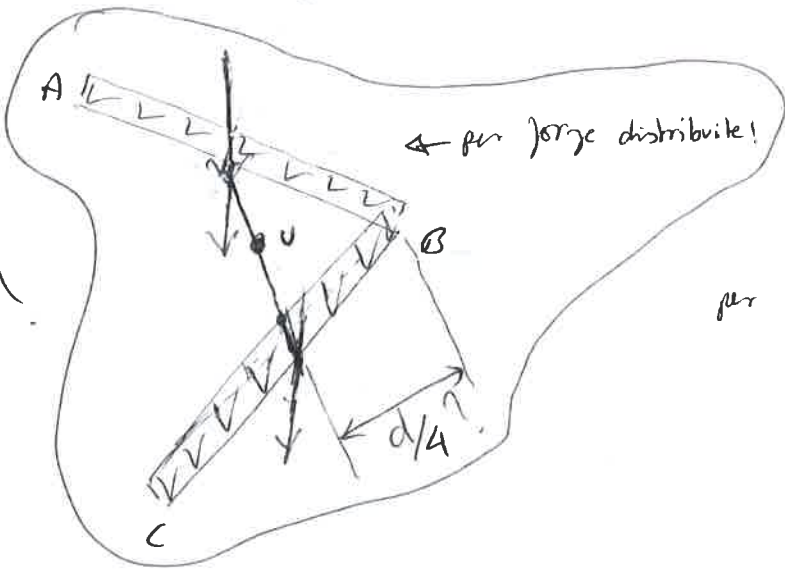
• questo metodo cerca di trovare la costante che interpola

questi momenti $F_{tot} = \frac{qa^2}{2}$

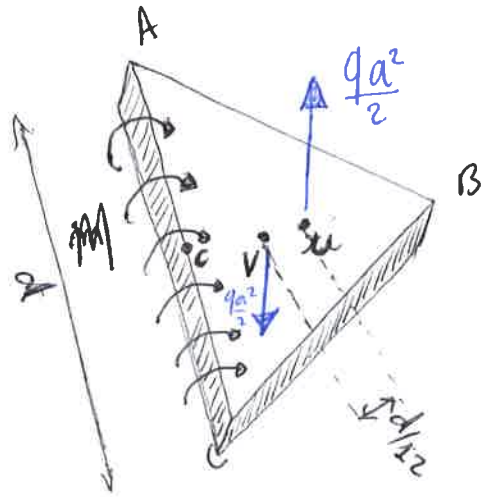


$d = a\sqrt{2}$

U: = punto di applicazione
 delle risultante delle
 reazioni vincolari sui
 lati \overline{AB} e \overline{BC}



$\overline{UV} = \frac{d}{3} - \frac{d}{4} = \frac{d}{12}$



$$M_d = \frac{q a^2}{2} \frac{d}{12} \Rightarrow M = \frac{q a^2}{24} \approx 0,041 q a^2$$

ho una buona stima M_c (esatto) = $0,037 q a^2$

NB1

in un rettangolo la diagonale non è un asse di simmetria. e quindi potrei avere del taglio,

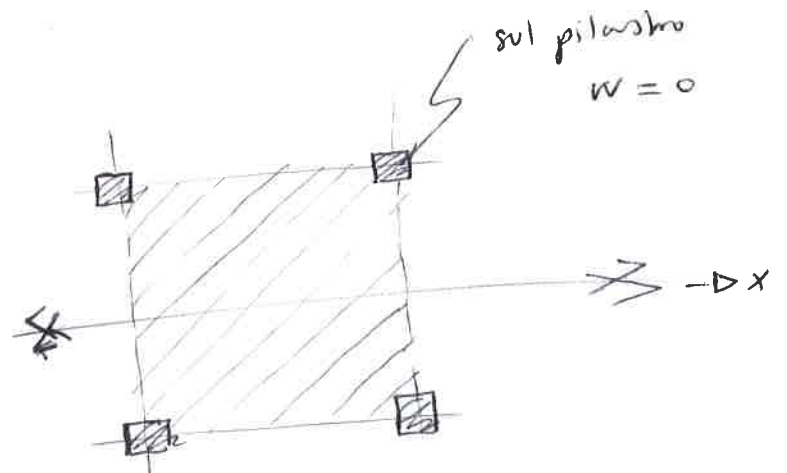
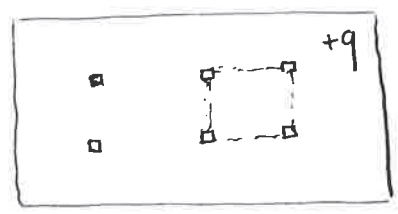
In una piastrina quadrata sulla diagonale il taglio è nullo! per simmetria!!!

NB2

approssime meglio le realtà!

SOLAI A FUNGIO: piastre appoggiate sui pilastri!

Ché immaginiamo il solario sviluppato infinitamente, con un carico distribuito uniforme q e analizziamo un campo centrale.



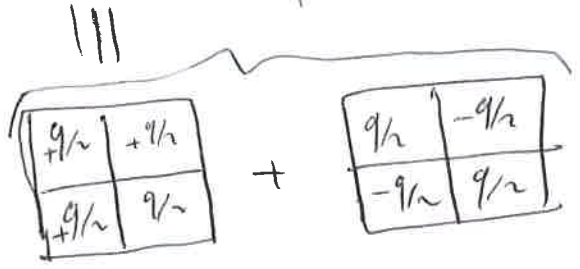
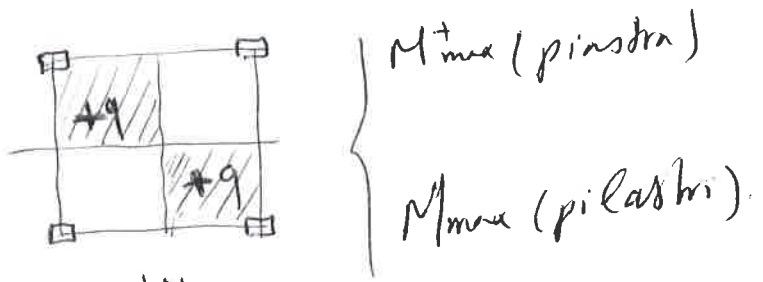
NB! sull'asse di simmetria il taglio è nullo!

e.g. quali sono le azioni di carico che mi massimizzano o il momento flettente o il ~~taglio~~ sforzo assiale.

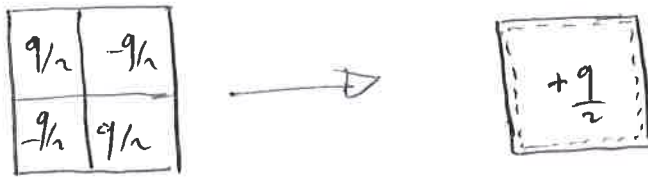
→ un q distribuito ovunque mi dà N_{max} ~~assiale~~ nei pilastri ma mi dà $M_{flettente}$ nullo nei pilastri.

condizioni di carico: i) $+q$ tutto il solario → M_{max}^- (pilastri)
 N_{max}^+ (pilastri)

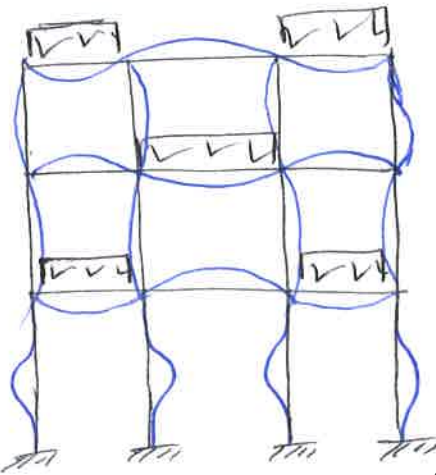
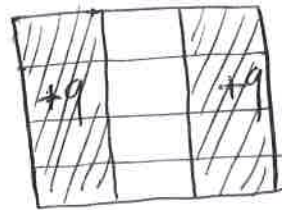
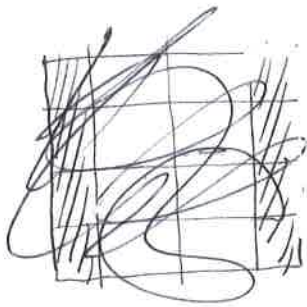
ii) carico a scacchiera



se ho antisimmetria nel carico \Rightarrow posso estrarre una piastra e analizzarla come un'appoggiata!



\rightarrow • carico a strisce: $\left\{ \begin{array}{l} M_{max}^+ \text{ (piastre)} \\ M_{max} \text{ (pilastri)} \end{array} \right.$



combinazione per

NB! se ho piastre quadrate / M_{max}^+ con q a scacchiera
 ma se le piastre sono rettangolare, non so
 a priori se e' peggio un q a scacchiera o
 un q a strisce... li analizzo entrambi!

campo degli spostamenti.

$$\begin{cases} U = -z \varphi_x = -z \frac{\partial w}{\partial x} \\ V = -z \varphi_y = -z \frac{\partial w}{\partial y} \\ W = w(x, y) \end{cases}$$

campo degli
delle
deformazioni

$$\begin{cases} \epsilon_{xx} = \frac{\partial U}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \epsilon_{yy} = \frac{\partial V}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{cases}$$

Legame costitutivo.

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_x + \nu \epsilon_y) \\ \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_y + \nu \epsilon_x) \\ \tau_{xy} = 2G \epsilon_{xy} = 2 \left(\frac{E}{2(1+\nu)} \right) \epsilon_{xy} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \left(-z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \left(-z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right) \\ \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \left(-z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \left(-z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right) \\ \tau_{xy} = \left(\frac{E}{1+\nu} \right) \cdot \left(-z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \end{cases}$$

Sede:

Castellina Marittima (PI)
Tel. 050 69211 Fax 050 692301

Stabilimento Sistemi a Secco:
Castellina Marittima (PI)
Tel. 050 69211 Fax 050 692301

Stabilimento Sistemi Intonaci:
Gambassi Terme (FI)
Tel. 0571 6307 Fax 0571 678014

<http://www.knauf.it> e-mail: knauf@knauf.it

K-Centri:

Knauf Milano - Rozzano (MI)
Tel. 02 52823711

Knauf Padova - Padova (PD)
Tel. 049 7165011

Knauf Pisa - Castellina Marittima (PI)
Tel. 050 69211

Knauf Roma - Roma (RM)
Tel. 06 32099911

KNAUF
Sistemi Costruttivi

$$\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} = p$$

$$\begin{cases} M_x = -D(\kappa_x + \nu \kappa_y) \\ M_y = -D(\kappa_y + \nu \kappa_x) \\ M_{xy} = -D(1-\nu)(\kappa_{xy}) \end{cases}$$

$$D = \frac{E \cdot t^3}{12(1-\nu^2)}$$

$$\begin{cases} Q_x = \frac{\partial}{\partial x} M_x + \frac{\partial}{\partial y} M_{xy} = -D \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 w) \\ Q_y = \frac{\partial}{\partial y} M_y + \frac{\partial}{\partial x} M_{xy} = -D \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 w) \end{cases}$$

In fine:

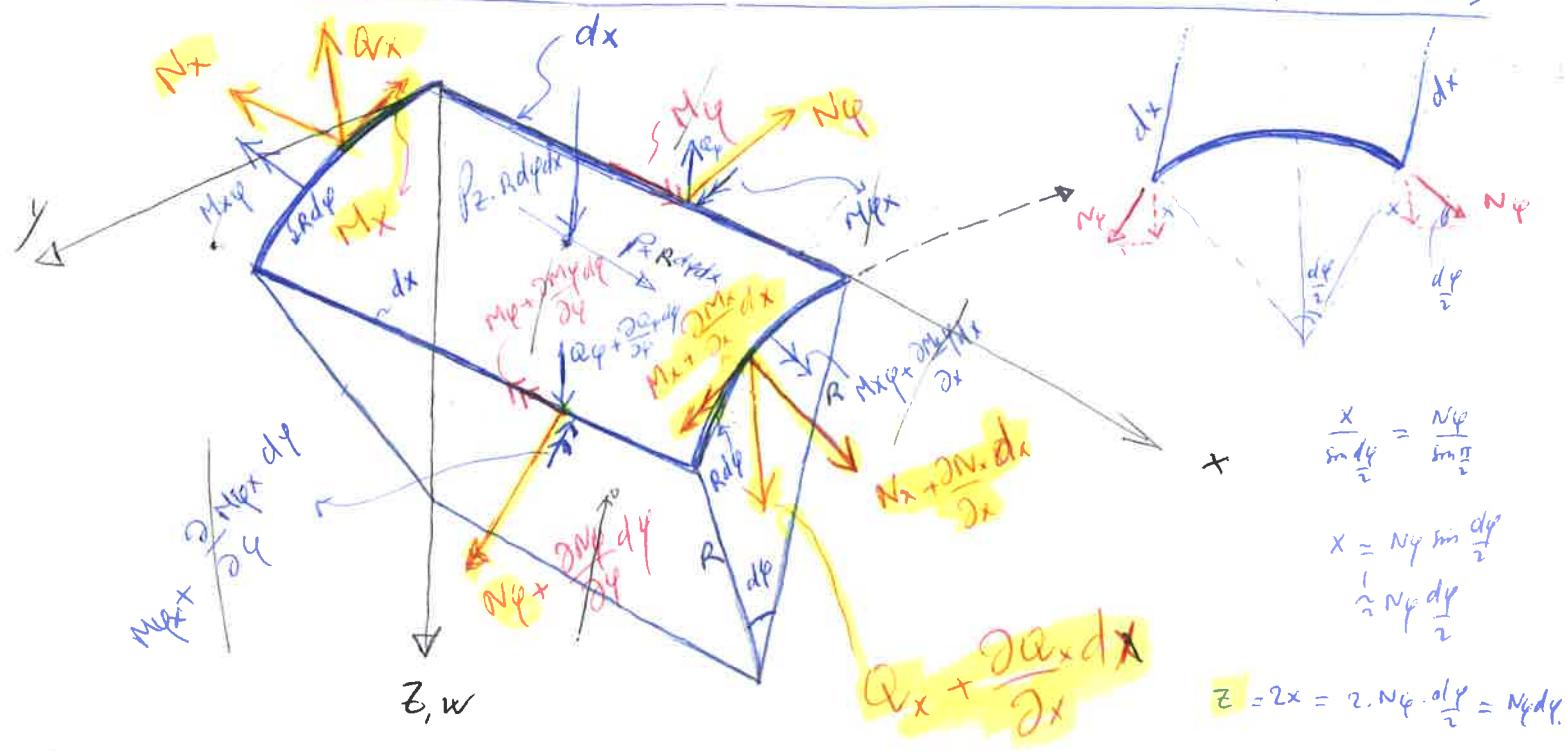
$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{p}{D}$$

$$\nabla^4 w = \Delta^2 w = \frac{p}{D}$$

1811

è l'equazione differenziale alle derivate parziali che governa la flessione delle piastre! Si chiama Eq. di Sophie-Germain - Lagrange!!!

GUSHI CILINDRICI (CYLINDRICAL SHELLS)



- $M_{xy} = M_{yx} = 0$; $Q_y = 0$: taglio laterale!
- $N_{xy} = N_{yx} = 0$; $Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy = 0$.
- $M_y = \text{costante lungo la circonferenza}$
- $N_y = \text{costante}$

per ragioni di simmetria!

Equilibri:

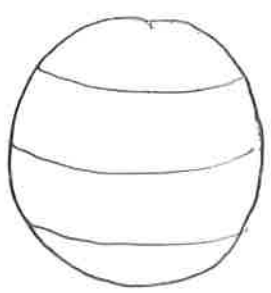
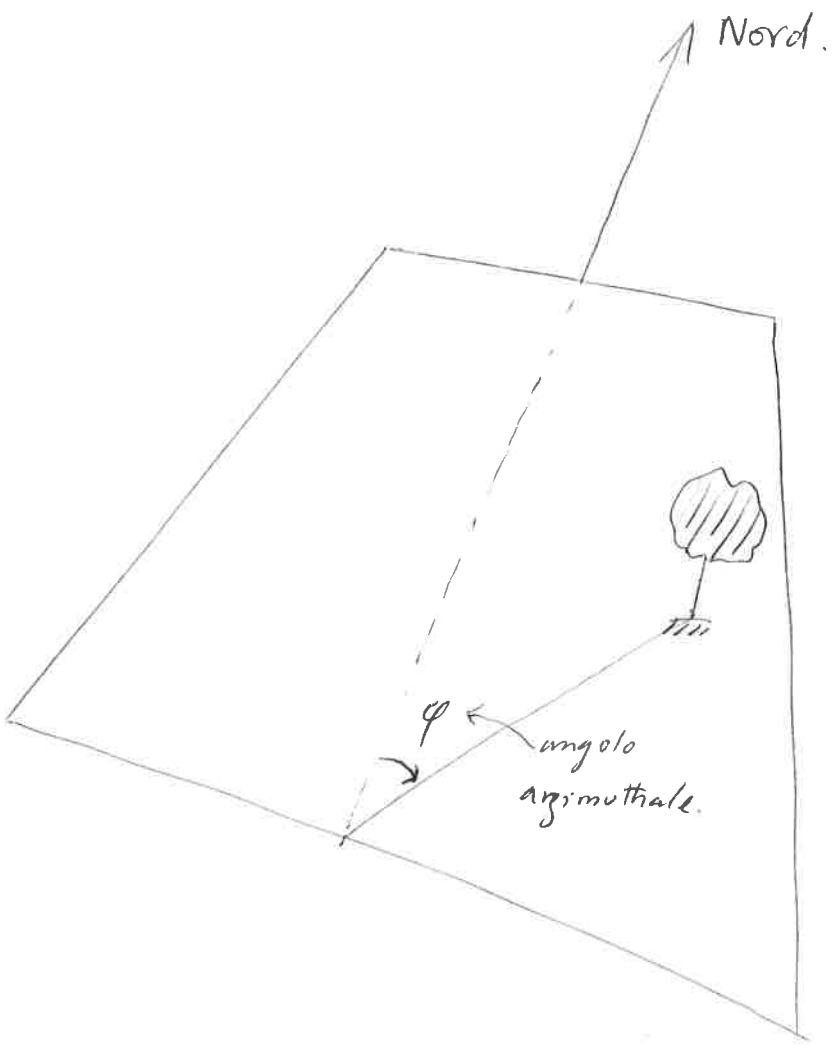
$$\rightarrow x \quad -N_x R dy + (N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx) R dy + P_x R dy dx = 0$$

$$-N_x R dy + N_x R dy + \frac{\partial N_x}{\partial x} R dy dx + P_x R dy dx = 0$$

$$\left(\frac{\partial N_x}{\partial x} + P_x \right) R dy dx = 0$$

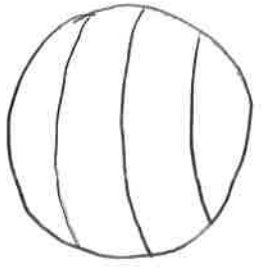
$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + P_x = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial N_x}{\partial x} = -P_x} \quad \textcircled{I}$$



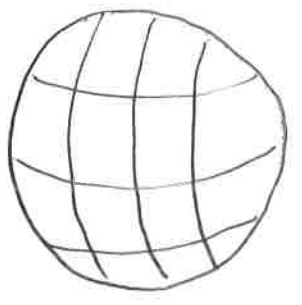
paralleli

+



meridiani

=



$\downarrow z$

$$-Q_x R dy + (Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx) R dy + P_z \cdot R dy dx + \bar{z} \cdot dx = 0$$

$$-\cancel{Q_x R dy} + \cancel{Q_x R dy} + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx R dy + P_z \cdot R dy dx + N_y dy \cdot dx = 0$$

$$(R \frac{\partial Q_x}{\partial x} + P_z \cdot R + N_y) dy dx = 0$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + P_z + \frac{N_y}{R} = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{N_y}{R} = -P_z} \quad \textcircled{II}$$

$\rightarrow x$

$$-M_x R dy + (M_x + \frac{\partial M_x}{\partial x} dx) R dy + P_z \cdot R dy dx \cdot \frac{dx}{2} - Q_x R dy dx = 0$$

$$-\cancel{M_x R dy} + \cancel{M_x R dy} + \frac{\partial M_x}{\partial x} dx dy \cdot R + P_z \cdot R dy dx \cdot \frac{dx}{2} - Q_x R dy dx = 0$$

Infinitesimo di ordine superiore

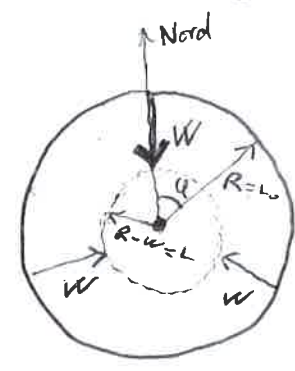
$$\boxed{\frac{\partial M_x}{\partial x} - Q_x = 0} \quad \textcircled{III}$$

amp

NB! Siccome il problema è internamente iperstatico non mi basta solo l'equilibrio ma devo porre la congruenza!

$$E = \frac{L - L_0}{L_0} = \frac{R - w - R}{R} = -\frac{w}{R}$$

deformazione azimutale o circonferenziale!



deformazione omotetica!
 $\Delta \psi_{forma} = \Delta \psi_{angolo} = 0$

LEGAME COSTITUTIVO

N.B. l'equazione (I) non la trattiamo nella nostra trattazione perché è facile da calcolare! e hp tubo molto lungo!!!

invece (II) e (III)

$$\begin{cases} \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{N_\varphi}{R} = -P_z \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} = Q_x \end{cases}$$

3 incognite!

$Q_x; N_\varphi; M_x$

ho \Rightarrow 2 equazioni e 3 incognite \Rightarrow dobbiamo considerare gli spostamenti dei punti del piano medio

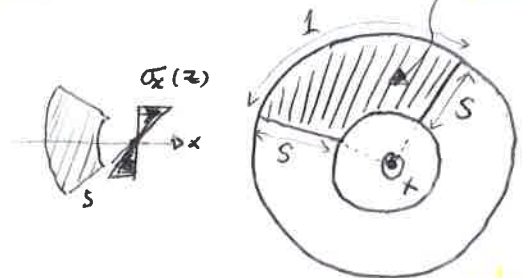
$$\boxed{\varepsilon_x = \frac{du}{dx}}; \quad \boxed{\varepsilon_y = \varepsilon_\varphi = -\frac{w}{R}}; \quad \varepsilon_y = \frac{dr}{dy} = 0$$

per simmetria!

Dalla legge di Hooke troviamo.

$$\sigma = E \varepsilon \Rightarrow \frac{N}{A} = E \varepsilon \Rightarrow N = E \cdot A \cdot \varepsilon$$

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} [\varepsilon_x + \nu \varepsilon_\varphi] \\ \sigma_\varphi = \frac{E}{1-\nu^2} [\varepsilon_\varphi + \nu \varepsilon_x] \end{cases}$$



$A = S \cdot 1$

Da queste due posso risalire a N_x e N_φ sapendo che $\sigma = \frac{N}{A} = \frac{N}{S}$

$$\begin{cases} N_x = \frac{ES}{(1-\nu^2)} [\varepsilon_x + \nu \varepsilon_\varphi] = \frac{ES}{(1-\nu^2)} \left[\frac{du}{dx} - \nu \frac{w}{R} \right] \\ N_\varphi = \frac{ES}{1-\nu^2} [\varepsilon_\varphi + \nu \varepsilon_x] = \frac{ES}{(1-\nu^2)} \left[-\frac{w}{R} + \nu \frac{du}{dx} \right] \end{cases}$$

Siccome dall'hp $N_x = 0$ (tubo molto lungo) con inerzia infinita in direzione x.

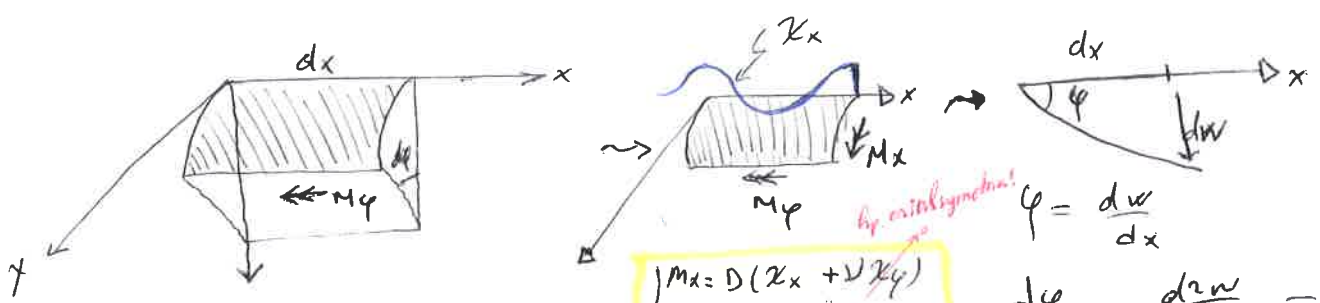
$$\Rightarrow \frac{ES}{(1-\nu^2)} \left[\frac{du}{dx} - \nu \frac{w}{R} \right] = 0 \Rightarrow \frac{du}{dx} = \nu \frac{w}{R}$$

$$\Rightarrow N_\varphi = \frac{E \cdot S}{1-\nu^2} \left[-\frac{w}{R} + \nu^2 \frac{w}{R} \right] = -\frac{ES}{1-\nu^2} \cdot \frac{w}{R} [1-\nu^2] = -\frac{ESw}{R}$$

$\Rightarrow N_y = -\frac{ES \cdot w}{R}$ *comp*

considerando momento flettente, possiamo concludere dalla simmetria che non c'è cambio di curvatura nella direzione circonferenziale.

\Rightarrow nella direzione x la curvatura $\chi_x = \frac{d^2 w}{dx^2}$



Dalla legge costitutiva: $\begin{cases} M_x = D(\chi_x + \nu \chi_y) \\ M_y = D(\chi_y + \nu \chi_x) \end{cases}$

sapendo che $\begin{cases} M_y = \nu M_x \\ M_x = -D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ D = \frac{E \cdot S^3}{12(1-\nu^2)} \end{cases}$

$\phi = \frac{dw}{dx}$
 $\frac{d\phi}{dx} = -\frac{dw}{dx^2} = \chi_x$

ma da san venant:
 $\chi_x = \frac{M_x}{EI}$ trave
 $\chi_x = \frac{M_x}{D}$ piastra
 $\Rightarrow \frac{M_x}{D} = -\frac{dw}{dx^2}$

\Rightarrow l'eq (II) è eliminando α_x da quelle (I) e diventa \rightarrow la seguente equazione

$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[-D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] - \frac{ESw}{R^2} = -P_2$

$\frac{D+D}{D} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{ES \cdot w}{R^2 \cdot D} = + \frac{P_2}{D}$

$4 \frac{ES}{R^2 D} = \frac{E \cdot S \cdot 12(1-\nu^2)}{R^2 \cdot \frac{E \cdot S^3}{12(1-\nu^2)}}$
 $\frac{12(1-\nu^2)}{R^2 \cdot S^2}$ OK!
 $4\beta^4 = \frac{12^2(1-\nu^2)}{R^2 \cdot S^2}$

$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \underbrace{\left(\frac{E \cdot S}{R^2 \cdot D} \right)}_{4\beta^4} w = + \frac{P_2}{D}$

$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4\beta^4 \cdot w = \frac{P_2}{D}$

jigo!!!

una eq. e una incognita.

$$\Rightarrow W_{,xxxx} + 4\beta^4 w = \frac{P_z}{D} \quad ; \quad D = \frac{E \cdot S^3}{12(1-\nu^2)} \quad , \quad \beta^4 = \frac{E \cdot S}{R^2 D}$$

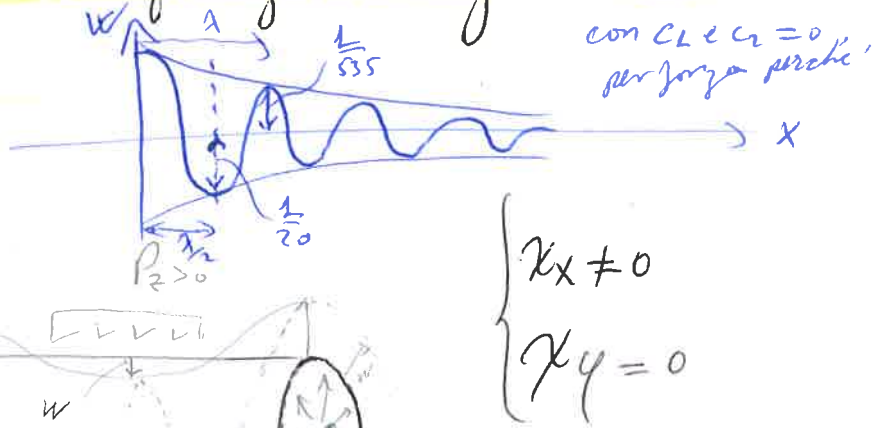
→ soluzione generale di questa equazione:

$$w = e^{\beta x} (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x) + e^{-\beta x} (c_3 \cos \beta x + c_4 \sin \beta x) + \psi(x)$$

ove $\psi(x)$ è la soluzione particolare!

NB)

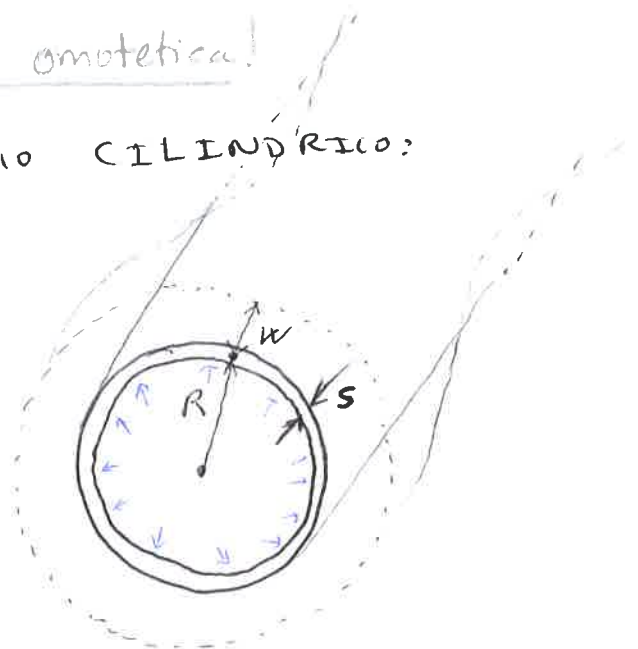
a noi interessa solo la deformazione longitudinale del guscio cilindrico.



Deformazione omotetica!

→ STATO TENSIONALE DEL GUSCIO CILINDRICO:

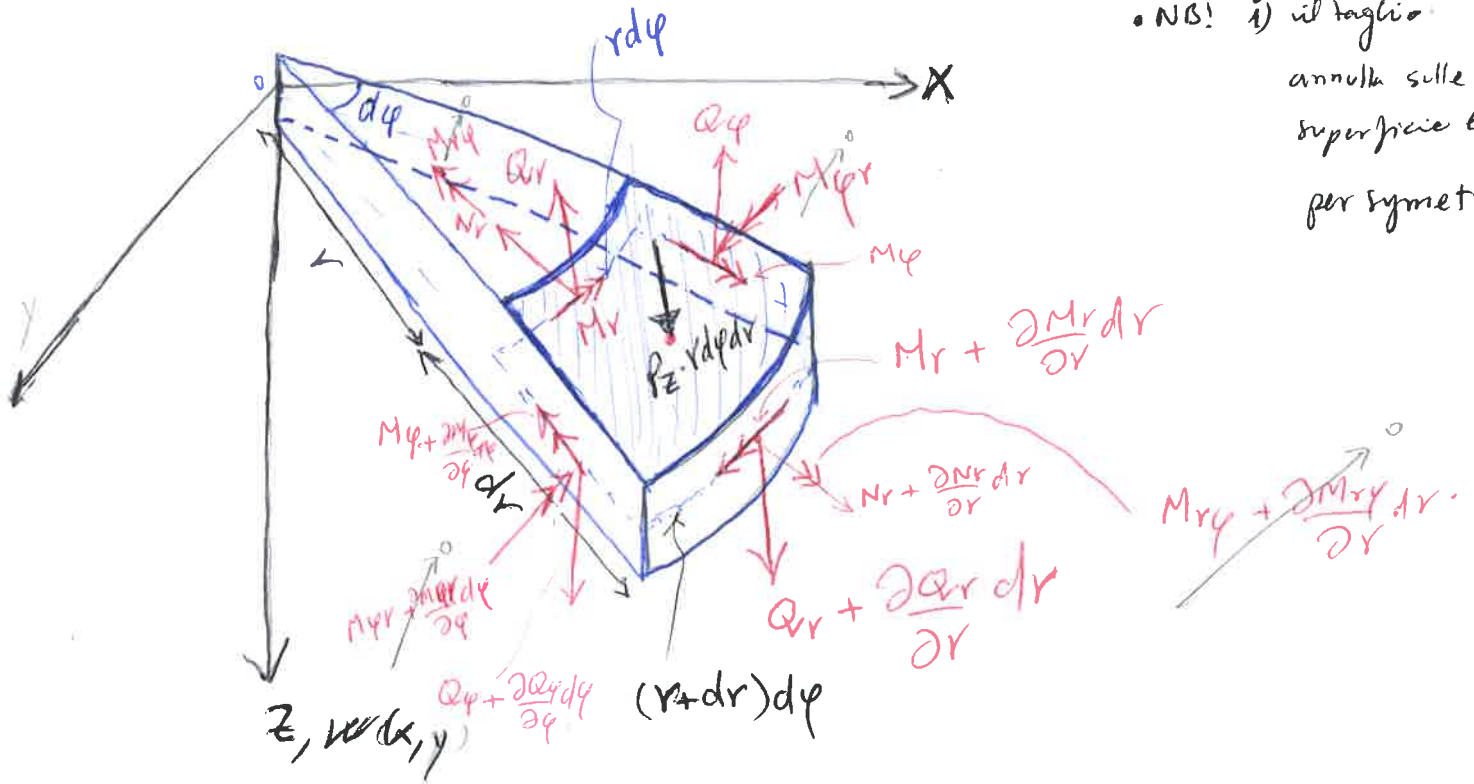
$$\left\{ \begin{aligned} N_x &= -\frac{ES}{R} w(x) \\ M_x &= -D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ M_\varphi &= -\nu D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ Q_x &= -D \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \end{aligned} \right.$$



$$D = \frac{E \cdot S^3}{12(1-\nu^2)} \quad , \quad \nu \hat{=} 0,3 ?$$

PIASTRE CIRCOLARI I

• NB! i) il taglio τ annulla sulle superficie laterali per simmetria!!!



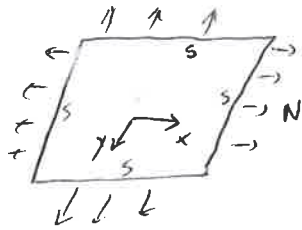
$\rightarrow r$ $- N_r r d\phi + (N_r + \frac{\partial N_r}{\partial r} dr)(r+dr)d\phi = 0$

$\downarrow z$ $(-Q_r)r \cdot d\phi + (Q_r + \frac{\partial Q_r}{\partial r} dr) \cdot r \cdot d\phi = 0$

ors ii) ^{tutti} I momenti torcenti sono nulli in quanto i piani paralleli e i piani meridionali risultano simmetrici!!!

REGIME MEMBRANALE DEI GUSCI CILINDRICI

1) Regime membranale! :



$$\sigma_x = \frac{N_x}{s} \rightarrow N_x = \sigma_x \cdot s$$

$$N_y = \sigma_y \cdot s$$

2) Regime flessionale! :

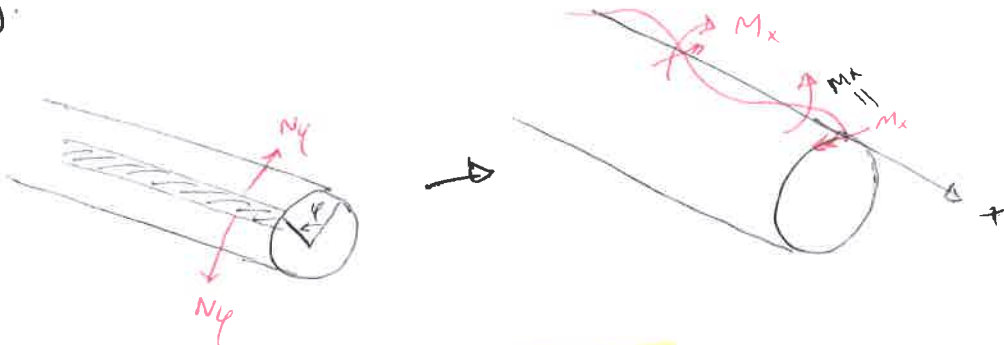


$$\left\{ \begin{array}{l} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_x, Q_y \end{array} \right.$$

NB! Nella hyp. di Kirchhoff questi due problemi ^{① e ②} sono disaccoppiati
 \Rightarrow vale sovrapposizione degli effetti!

• Nei gusci però lo sforzo assiale entra nel regime flessionale \Rightarrow i problemi ① e ② sono accoppiati.

e.g.



l'equazione:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{N_\phi}{R} = -P_z$$

$$M_x = D(\chi_x + \nu \chi_\phi)$$

$$\stackrel{\circ}{=} D \chi_x = -D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$N_\phi = -\frac{E \cdot s w(x)}{R}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(-D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{-E \cdot s w(x)}{R^2} \right) = -P_z$$

NB! il termine

$\frac{N_\phi}{R}$ è assente nelle piastre!



$\Rightarrow DW^{IV} + \frac{ES}{R^2} w = P_2$: linea elastica del 4° ordine
 con un termine in più $\frac{ES}{R^2}$ rispetto le travi.

→ ho che $\boxed{w^{IV} + \frac{ES}{R^2 D} w = \frac{P_2}{D}}$

con $D = \frac{E \cdot S^3}{12(1-\nu^2)}$

1ª eq ed una incognita: w .

è una equazione differenziale ordinaria non omogenea!

→ suppongo $\boxed{4\beta^4 = \frac{ES}{R^2 D}} \rightarrow \beta = \sqrt[4]{\frac{ES}{4DR^2}} = \sqrt[4]{\frac{3(1-\nu^2)}{R^2 S^2}} ; [\beta] = \frac{1}{L}$

$\Rightarrow \boxed{w^{IV} + 4\beta^4 w = \frac{P_2}{D}}$ ①

→ l'integrale generale dell'equazione è:

$\boxed{w(x) = e^{\beta x} (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x) + e^{-\beta x} (c_3 \cos \beta x + c_4 \sin \beta x) + W^p(x)}$

↑
soluzione particolare

→ se $\nu \in [0; 0,5] \rightarrow \beta \approx \frac{1,3}{\sqrt{RS}} \in [1,28; 1,32]$

→ mi servono 4 c.c. per trovare c_1, c_2, c_3, c_4 .

→ studio la soluzione particolare

tip. $P_2(x)$ è del tipo: $\boxed{P_2(x) = cx^n}$ con $n \leq 4$
 \downarrow
 cx^4

~~\Rightarrow~~
 ~~$w^p(x) = cx^4$~~
 ~~$w^{I p}(x) = 4cx^3$~~
 ~~$w^{II p}(x) = 12cx^2$~~
 ~~$w^{III p}(x) = 24cx$~~
 ~~$w^{IV p}(x) = ABC$~~
 Sostituiamo nell'eq. diff ①

assumo $w^p(x) = \chi \cdot \frac{P_2}{D}$

\downarrow
 $= \chi \cdot \frac{cx^4}{D}$

$\Rightarrow \boxed{w^p(x) = \frac{cx^4}{4\beta^4 D}}$

$w^{IV p}(x) = 24\beta^4 c$

$\Rightarrow 4\beta^4 \left(\chi \cdot \frac{P_2}{D} \right) = \frac{P_2}{D} \Rightarrow \chi = \frac{1}{4\beta^4}$ ok!!!

STUDIO DEI TERMINI SINUSOIDALI:

parto da $\beta = \sqrt[4]{\frac{3(1-\nu^2)}{R^2 S^2}}$ e introduco la cosiddetta lunghezza

d'onda λ associata al problema

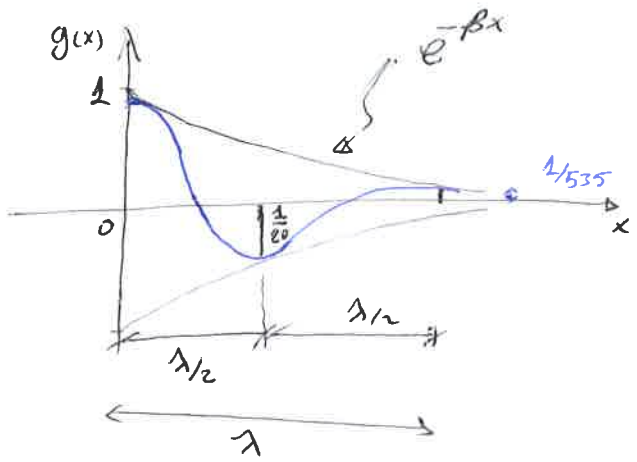
~~Amg~~ ~~888~~

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = 2\pi \sqrt[4]{\frac{R^2 S^2}{3(1-\nu^2)}} \approx 4,83 \sqrt{RS} \quad \text{se } \nu \in (0, 0,5)$$

- attraverso λ si può valutare l'estensione della zona dove è fondamentale il "regime flessionale".
 e.g. in un serbatoio infatti il regime flessionale è vicino ai vincoli, lontano prevale il regime membranale.

- studio il coseno perché più comodo ma vale anche per il seno.

$$g(x) = e^{-\beta x} \cos \alpha x = e^{-\frac{2\pi}{\lambda} x} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right)$$



$$g(0) = 1$$

$$g(\lambda) = e^{-2\pi} \cdot 1 = \frac{1}{535} \approx \frac{1}{500}$$

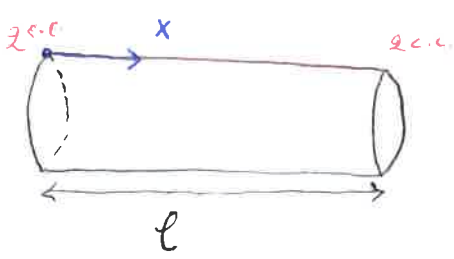
NB! ad una distanza λ dal mio bordo gli effetti flessionali sono quasi del tutto smorzati \Rightarrow possiamo non tenerne conto!

\Rightarrow dopo $x = \lambda$ non ho termini

flessionali!

CONDIZIONI AL CONTORNO PER LE 4 COSTANTI:

Tubo finito



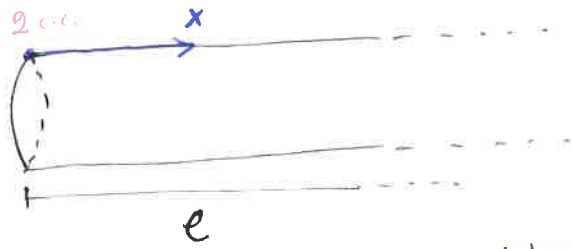
2 condizioni a $x = 0$

2 condizioni a $x = l$

Se Tubo e' semi-infinito:

$$w(x) = e^{\beta x} (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x) + e^{-\beta x} (c_3 \cos \beta x + c_4 \sin \beta x) + w^p(x)$$

mf

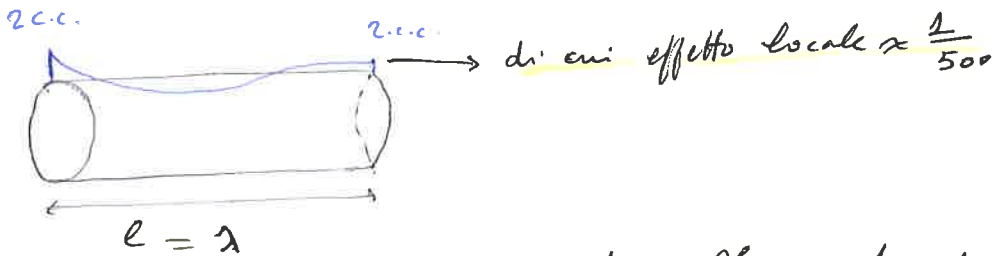


ho condizioni al contorno solo in $x=0$! ho solo c_3 e c_4

$c_1 = c_2 = 0$ (per evitare termini che $\rightarrow \infty$ per $x \rightarrow \infty$) perché cinematicamente non e' compatibile!!!

$$\Rightarrow w(x) = e^{-\beta x} (c_3 \cos \beta x + c_4 \sin \beta x) + w^p(x)$$

problema comune in ing. civile:



se $l \gg \lambda \Rightarrow$ gli effetti locali di tipo flessionale si studiano disaccoppiati d'uno dall'altro come se avessi 2 tubi semi-infiniti



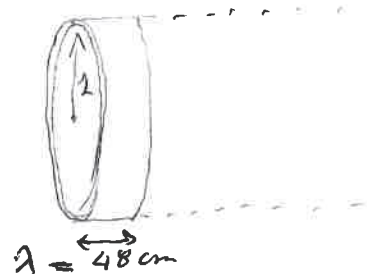
\Rightarrow Tubo lungo (snello): $l \gg \lambda$ Effetti di bordo indipendenti
 Tubo corto (T0330): $l < \lambda$ studio accoppiato delle 4 c.c.

NB! nei problemi tipici $\lambda \approx 4,83 \sqrt{R \cdot s}$

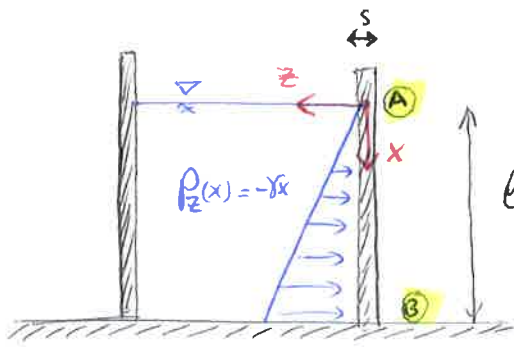
se $R = 1m$
 $S = 1cm$ (acciaio) $\rightarrow \lambda \approx 48cm$

$R = 1m$
 $S = 2cm$ (cb) $\rightarrow \lambda = 68cm$

$\lambda < R!$ siamo quasi certamente in tubo lungo



ESEMPIO (GUSCI CILINDRICI)



$l \gg \lambda \Rightarrow$ Il serbatoio e' snello!

\Rightarrow Studio indipendentemente i 2 problemi:

$$\begin{cases} \textcircled{A} & x=0 \\ \textcircled{B} & x=l \end{cases}$$

\Rightarrow IN A $W(x) = e^{-\beta x} (c_3 \cos \beta x + c_4 \sin \beta x) + W^p(x)$

c.c. del estremo libero:

$$\begin{cases} M_x = 0 \\ Q_x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} W''(0) = 0 \\ W'''(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_3 = 0 \\ c_4 = 0 \end{cases}$$

In A $W^p(x) = -\frac{\gamma x}{4\beta^4 D} = -\frac{\gamma R^2 x}{ES}$; $4\beta^4 = \frac{ES}{DR^2}$

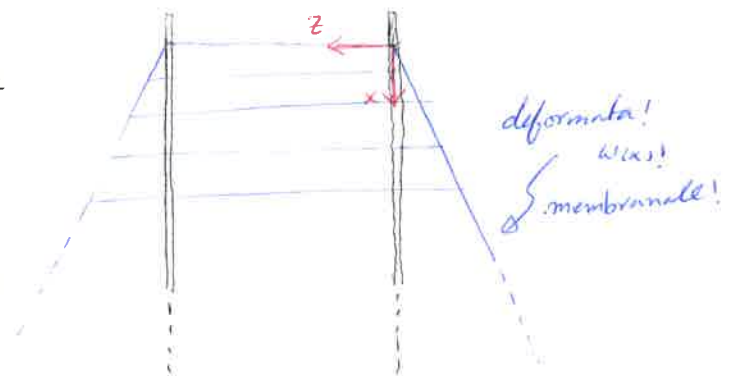
\Rightarrow quindi la soluzione generale e' = a quella particolare.

$$W(x) = -\frac{\gamma R^2 x}{ES}$$

NB! La legge sullo spostamento e' lineare non ci sono curvature e momenti flettenti!

La deformata ha comportamento e' in regime membranale!

$$\begin{aligned} M_x = 0 &\rightarrow W'' = 0 \\ Q_x = 0 \end{aligned}$$



\Rightarrow IN B : in prossimita' del vincolo avro' regime flessionale (curvature)!

$$W(x) = e^{\beta x} (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x) +$$

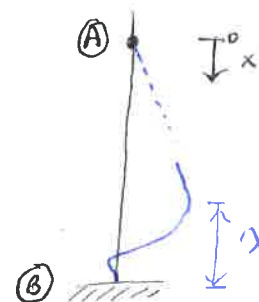
$$c.c. + e^{-\beta x} (c_3 \cos \beta x + c_4 \sin \beta x) + W^p(x)$$

$$\begin{cases} W'(l) = 0 \\ W(l) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_3 \text{ e } c_4 \neq 0 \end{cases}$$

avro' quindi regime flessionale.

$W_A(x) = e^{-\beta x} (c_3 \cos \beta x + c_4 \sin \beta x)$ se $x \rightarrow \infty \Rightarrow c_3 = c_4 = 0$

$W_B(x) = e^{\beta x} (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$ se $x \rightarrow -\infty \Rightarrow c_1 = c_2 = 0$

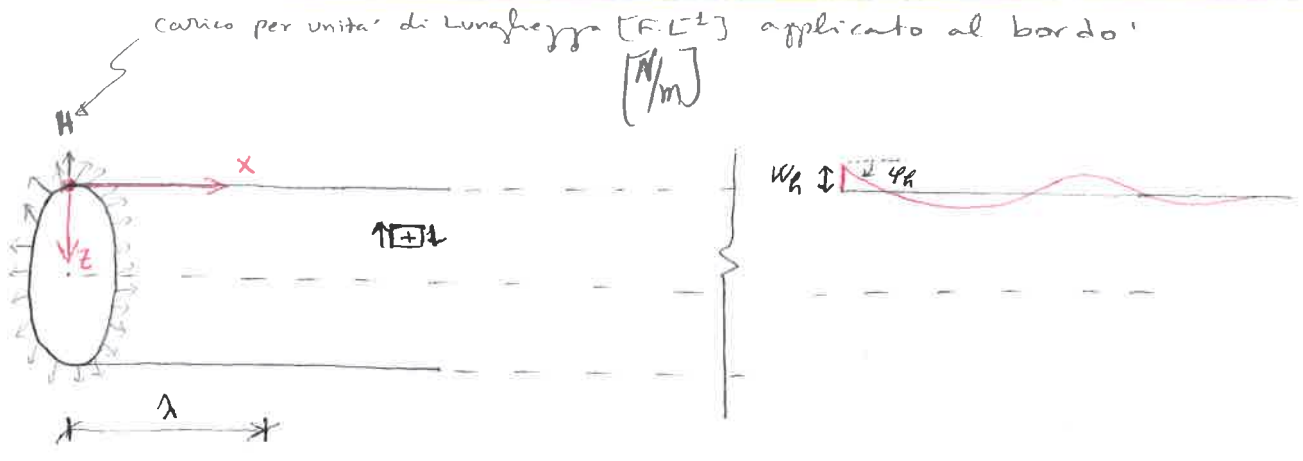


NB! prob. iperstatico!

M_y, M_x e Q_x molto grandi

per risolvere questo probl. uso coefficienti elastici o metodo delle forze!!!

COEFFICIENTI ELASTICI DI BORDO PER TUBI SEMI-INFINITI



→ consideriamo una $w(x)$ valida per i tubi semi-infiniti:

$$w_h = w(0) \Big|_{H=1} \quad ; \quad \varphi_h = \varphi(0) \Big|_{H=1} \quad ; \quad \varphi_h = w'(0) \Big|_{H=1}$$

$$w(x) = e^{-\beta x} (c_3 \cos \beta x + c_4 \sin \beta x) + \cancel{w_p(x)} \quad \rightarrow \quad P_z = 0$$

$$c.c \quad \left\{ \begin{array}{l} M_x(0) = 0 \\ Q_x(0) = +H \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -Dw''(0) = 0 \\ -Dw'''(0) = H \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} c_3 = 0 \\ c_4 = -\frac{H}{2\beta^3 D} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow w(x) = -\frac{H}{2\beta^3 D} \cdot e^{-\beta x} \cos \beta x$$

segno - per va contro z cioè espansione!

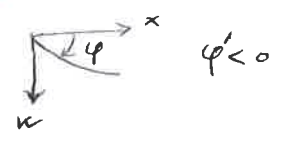
trov $w_h = w(0) \Big|_{H=1}$

$$w_h = -\frac{1}{2\beta^3 D}$$

e $w'_h = w'(0) \Big|_{H=1}$

$$w'_h = \varphi_h = -\frac{1}{2\beta^2 D}$$

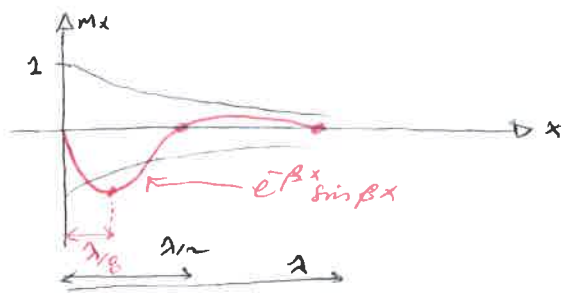
amp!



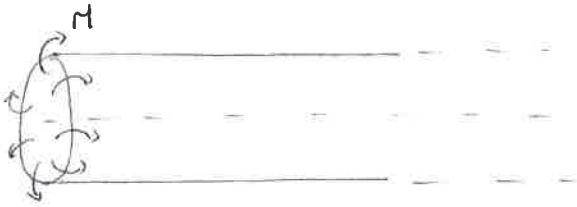
se orario \ominus se anti-orario $\Rightarrow \oplus$

calcolo lo stato tensionale:

$$\left\{ \begin{array}{l} N_\varphi = -\frac{ES \cdot w}{R} = -\frac{ES}{R} \left[-\frac{H}{2\beta^3 D} e^{-\beta x} \cos \beta x \right] \rightarrow e' \text{ max per } x=0 \\ M_x = -Dw'' = -\frac{H}{\beta} e^{-\beta x} \sin \beta x \rightarrow h' \text{ max in } x = \frac{\lambda}{8} \text{ e non in } x=0 \\ M_\varphi = V M_x \end{array} \right.$$



un altro caso



$$\begin{cases} M_x(0) = M \\ Q_x(0) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -D W''(0) = M \\ W'''(0) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_3 = -c_4 = \frac{M}{2\beta^2 D} \end{cases}$$

$$W(x) = e^{-\beta x} (c_3 \cos \beta x + c_4 \sin \beta x)$$

$$= \frac{M}{2\beta^2 D} \cdot \left[e^{-\beta x} (\cos \beta x - \sin \beta x) \right]$$

⇒ posso calcolare

$$\begin{cases} W_M = W(0) \Big|_{M=1} = -\frac{1}{2\beta^2 D} \\ \varphi_M = \varphi(0) \Big|_{M=1} = W'_M(0) \Big|_{M=1} = -\frac{1}{\beta D} \end{cases}$$

NB) le massime sollecitazioni in $x=0$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{Max } (M_x) = M \\ \text{Max } N_y \end{array} \right.$; $\text{Max } (M_\varphi)$

Tabella coef. elastici

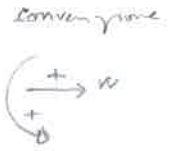
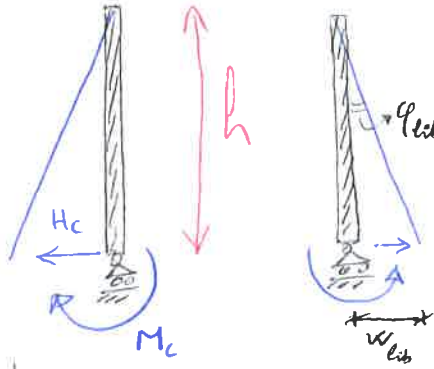
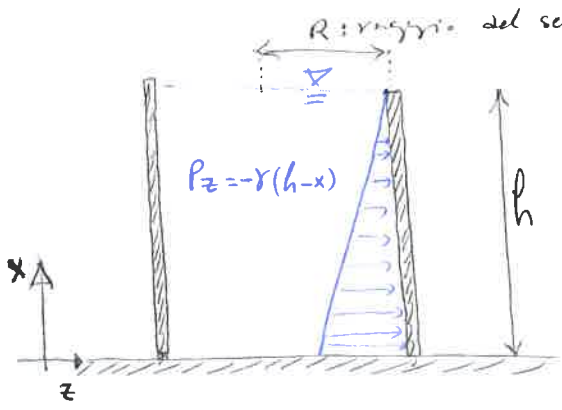
$ W_M = \frac{1}{2\beta^2 D}$	$ \varphi_M = \frac{1}{\beta D}$	← $M=1$
$ W_H = \frac{1}{2\beta^3 D}$	$ \varphi_H = \frac{1}{2\beta^2 D}$	← $H=1$

oss.

$|W_M| = |\varphi_H|$ per il Th. di Betti!!!



ES SERBATOIO CILINDRICO INCASTRATO (METODO DELLE FORZE O COEFFICIENTI ELASTICI).



e.g. prima

$$\begin{cases} w = -\frac{\gamma R^2 x}{ES} \\ \varphi = \frac{\gamma R^2}{ES} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |w_{lib}| = \frac{\gamma R^2 h}{ES} \\ |\varphi_{lib}| = \frac{\gamma R^2}{ES} \end{cases}$$

Scegliamo la struttura principale in modo che si sviluppi la deformata membranale ossia solo $N\varphi$ ma non quella flessionale.

• struttura principale: staticamente determinata

Eq di congruenza: $\begin{cases} w(0) = 0 \\ \varphi(0) = 0 \end{cases}$

M_c e H_c : sono incognite iperstatiche!

Eq. di congruenza:

$$\begin{cases} -|w_{lib}| - H_c |w_H| - M_c |w_m| = 0 \\ -|\varphi_{lib}| - H_c |\varphi_H| - M_c |\varphi_m| = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

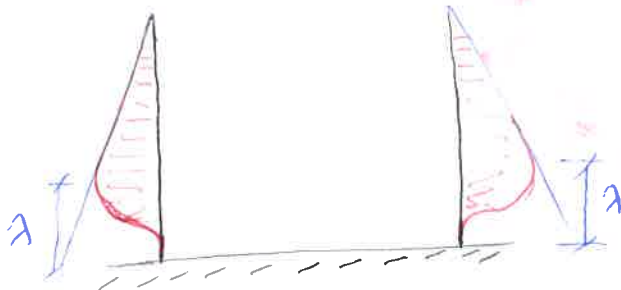
mediante i coefficienti elastici \Rightarrow

$$H_c = -\gamma \frac{e\beta h - 1}{2\beta^2} ; M_c = \gamma \frac{\beta h - 1}{2\beta^3}$$

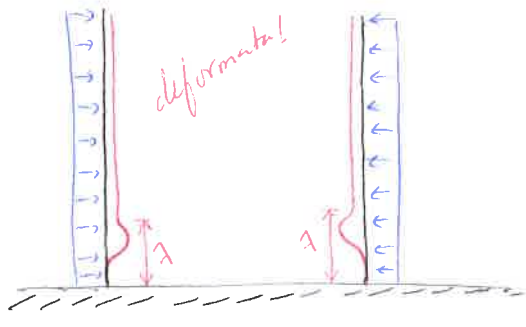
\rightarrow siccome $\beta h = \frac{2\pi h}{\lambda} = 2\pi \frac{h}{\lambda} \gg 1 \Rightarrow \beta h \gg 1$. quindi

$H_c < 0$ e $M_c > 0$

\rightarrow la deformata!



Es



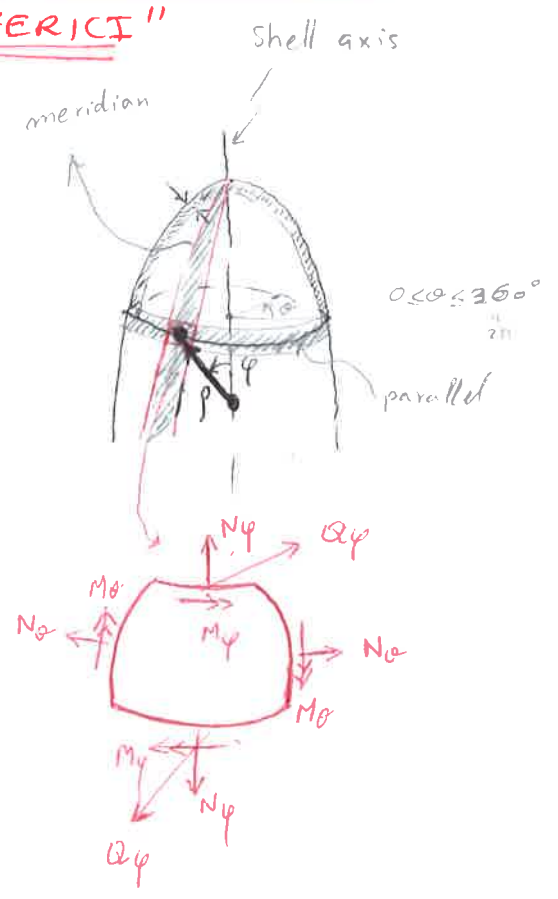
GUSCI ASSIALSIMMETRICI CON 2 RAGGI DI

CURVATURA: "Gusci SFERICI"

ρ : raggio di curvatura minimo locale

φ : coordinata che descrive il meridiano

θ : coordinata che descrive il parallelo.



• un guscio e' sottile se $\frac{t}{\rho} < \frac{1}{20} \rightarrow 20 < \frac{\rho}{t}$

e.g. uova $\frac{t}{\rho} = \frac{1}{50}$: guscio sottile.

hp i) condizione di carico assialsimmetrici \Rightarrow

\Rightarrow ii) stato tensionale assialsimmetrico, normalmente preponderante

• stato di sforzo membranale $\{N_\varphi, N_\theta\}$

• stato di sforzo flessionale $\{M_\varphi, M_\theta, Q_\varphi\}$ come nei gusci $Q_\theta = 0$

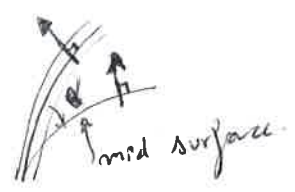
\rightarrow preponderante solo ove ci sono azioni concentrate (vincoli)

ESEMPIO GUSCIO SFERICO SOGGETTO A PESO PROPRIO

• NB! la teoria delle membrane applicata a tutti gusci di qualsiasi materiale!
 puo essere

hp • le deformazioni sono piccole rispetto allo spessore del guscio

hp • le sezioni si deformano ma si mantengono piane cioè



$$\Rightarrow \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \quad \text{e} \quad \epsilon_z = 0$$

hp • $\sigma_z = 0 \Rightarrow$ Stato di tensione piana o stato piano di tensione!!!

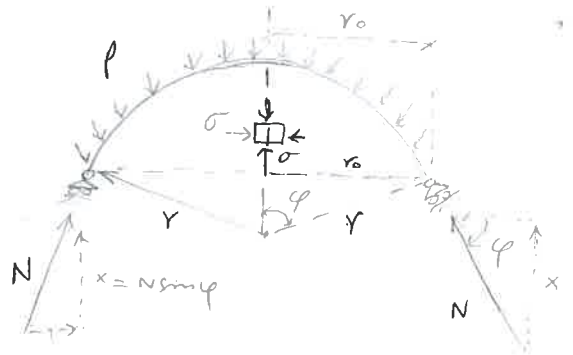
NO! • La capacita' di resistere alle forze normali dei gusci e' impressionante e.g. uova e light bulb! nonostante la loro fragilita' e sottilezza!

OUOVA $r = 20 \text{ mm}$ $t = 0,4 \text{ mm}$ $\rightarrow \frac{t}{r} = \frac{1}{50} < \frac{1}{20} \Rightarrow$ Thin shell!

• Equilibrio verticale:

$$(N \sin \varphi) 2r_0 \rightarrow (P) \cdot 2r_0^2 = 0$$

$$\begin{cases} N = \frac{Pr_0}{2 \sin \varphi} = \frac{P \cdot r \sin \varphi}{2 \sin \varphi} = \frac{P \cdot r}{2} \\ \frac{r_0}{\sin \varphi} = \frac{r}{\sin^2 \varphi} \Rightarrow r_0 = r \sin \varphi \end{cases}$$



$$\Rightarrow \boxed{N = \frac{P \cdot r}{2}}$$

questa relazione vale ovunque in guscio! e non varia con φ . al contrario di piastre il carico e' supportato dal piano medio

In seguito si dimostra che il contributo flessionale

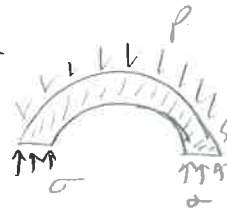
e' insignificante rispetto a quella membranale nelle shell (gusci). e' significante solo dove ci sono forze concentrate e vincoli!

→ siccome

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{N}{t}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma = -\frac{Pr}{2t}}$$

perche' di compressione.



hp. lo sforzo normale al piano medio e' trascurabile.

→ dalla legge di Hooke posso calcolare la deformazione

Legame costitutivo:

$$\epsilon = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) = \frac{\sigma}{E} (1 - \nu) \quad \text{ma } \sigma_x = \sigma_y = \sigma$$

$$\Rightarrow \boxed{\epsilon = -(1 - \nu) \frac{P \cdot r}{2Et}}$$

quindi la circonferenza ^{della sfera} si riduce

$$\Rightarrow 2\pi r' = 2\pi (r + \epsilon r)$$

$$\downarrow 2\pi r (1 + \epsilon)$$

$$\boxed{r' = r(1 + \epsilon)} \quad \text{circonferenza ridotta!}$$

quindi posso calcolare la variazione della curvatura

$$\chi = \frac{1}{r'} - \frac{1}{r} = -\frac{\epsilon}{r} (1 - \epsilon + \epsilon^2) \approx -\frac{\epsilon}{r}$$

$$\Rightarrow \kappa = -\frac{\epsilon}{r}$$

$$\text{ma } \epsilon = -\frac{(1-\nu) \cdot P \cdot r}{2Et}$$

$$\kappa = \frac{(1-\nu) \cdot P}{2Et}$$

→ considerando la relazione per guscio - momento flettente derivato dalla formula per le piastre. e considerando $\kappa = \kappa_x = \kappa_y$

$$\Rightarrow M = -D(\kappa_x + \nu \kappa_y) = -D(1-\nu^2) \cdot \frac{P}{2Et} = -\frac{P \cdot t^2}{24}$$

quindi posso calcolare sforzo di deformazione dovuto alla flessione

$$\sigma_{\text{bending}} = \frac{6M}{t^2} = -\frac{P}{4}$$

Se confronto $\sigma_{\text{memb.}}$ con $\sigma_{\text{flessione}}$

Imp

$$\frac{\sigma_{\text{memb.}}}{\sigma_{\text{fless.}}} = \frac{2r}{t}$$

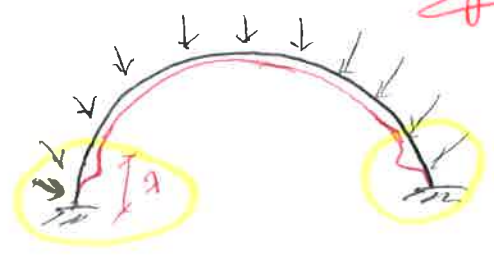
$$\sigma_{\text{memb.}} = \frac{2r}{t} \cdot \sigma_{\text{fless.}}$$

$\Rightarrow \sigma_{\text{memb.}} \gg \sigma_{\text{flessione}}$

⇒ possiamo concludere che sforzo applicato o peso proprio ~~è~~ è supportato predominantemente dallo sforzo membranale nell guscio!!!

- La stato di sforzo membranale ($\sigma_{\text{memb.}}$) approssima bene lo stato tensionale in gusci sottili ma attenzione! va posta in corrispondenza dei vincoli e carichi concentrati!
e.g. deformata del guscio sferico! ricostruito

$E_{\text{acciaio}} = 210 \text{ GPa}$
 $E^{\text{cfs}} = 20 \text{ GPa}$



buckling under compression! *Imp*

$$\sigma_{\text{cr}} = K \cdot \frac{E \cdot t}{r}$$

$K \approx 0,25$ sforzo guscio!

e.g. guscio di cenerate $\frac{t}{r} = \frac{1}{500} \Rightarrow r = 500t$
 $E = 20 \text{ GPa}$
 $\sigma_{\text{cr}} = 0,25 \cdot 20 \cdot 10^9 \left(\frac{1}{500}\right) = 10 \text{ MPa}$

NB! ↑

CALCOLO SFORZI MEMBRANALI NEI GUSCI ASSIAL-SIMMETRICI

SHELLS OF REVOLUTION

→ $L_{AC} = ?$

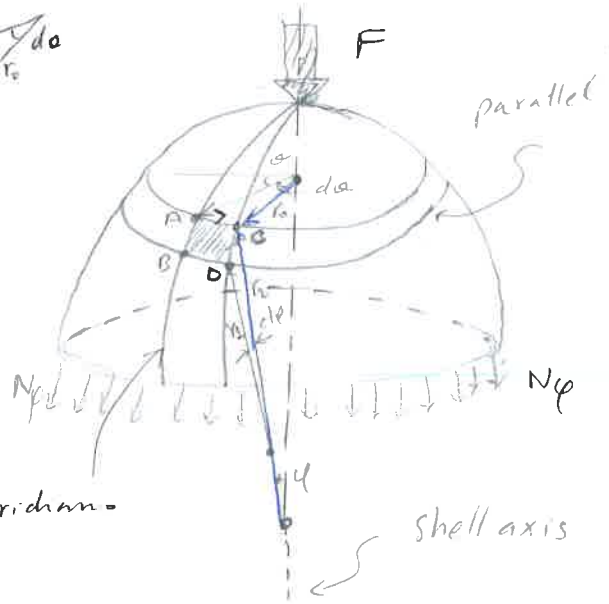
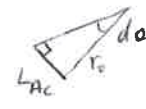
$$\frac{L_{AC}}{\sin \theta} = \frac{r_0}{\sin \frac{\pi}{2}} \Rightarrow L_{AC} = r_0 \sin \theta$$

$\approx r_0 d\theta$

$$\Rightarrow L_{AC} = r_0 \cdot d\theta$$

ma $r_0 = r_2 \cdot \sin \varphi$

$$\Rightarrow L_{AC} = r_2 \cdot \sin \varphi \cdot d\theta$$



→ $L_{CD} = ?$

$$\frac{L_{CD}}{\sin \varphi} = \frac{r_1}{\sin \frac{\pi}{2}} \Rightarrow L_{CD} = r_1 \sin \varphi$$

$\approx r_1 \cdot d\varphi$

$$L_{CD} = r_1 \cdot d\varphi$$

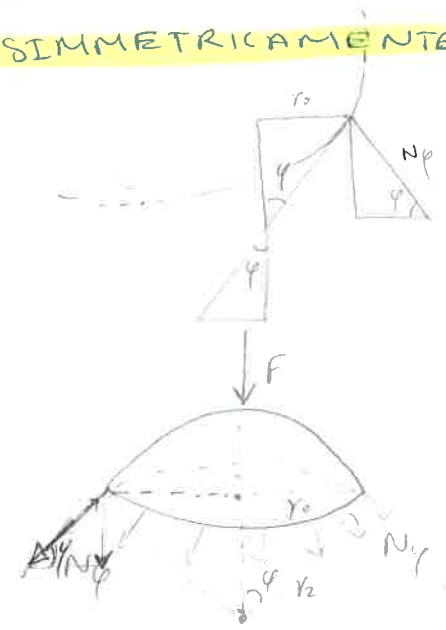
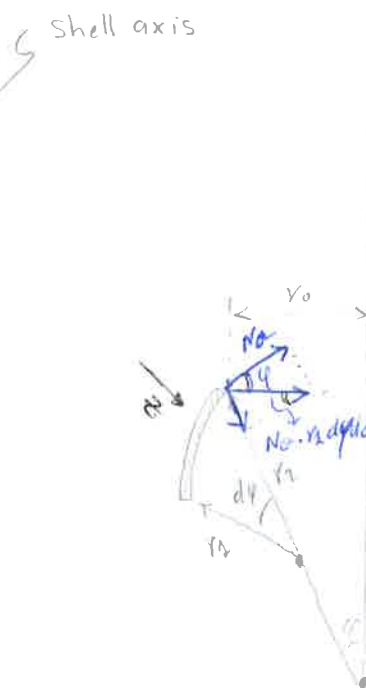
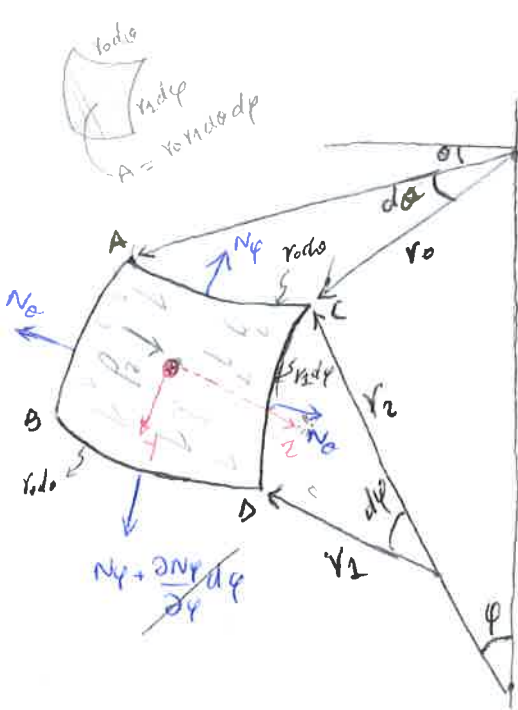
$$\frac{r_0}{\sin \varphi} = \frac{r_2}{\sin \frac{\pi}{2}} \Rightarrow r_0 = r_2 \sin \varphi$$

← "PRINCIPAL RADII OF CURVATURE":

cioè piani meridiani e paralleli sono associati con il principio dei raggi delle curvature r_1 e r_2 !

ove r_1 e r_2 sono costanti che conosciamo

GUSCI ASSIAL-SIMMETRICI CARICATI SIMMETRICAMENTE



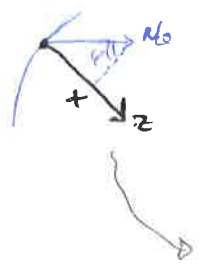
$$r_0 = r_2 \sin \varphi$$

NB. ~~Le forze di taglio!~~ nei problemi assial-simmetrici!

Le sole due incognite sono N_θ e N_φ . [sforzo circonferenziale N_θ e N_φ sforzo meridionale]

membranale!
meridionale
 N_φ sforzo

ho 2 incognite e ho bisogno di 2 equazioni di equilibrio.



- $p_z \cdot r_0 d\theta r_1 d\varphi = p_z \cdot r_0 d\theta \cdot r_1 d\varphi$: contributo del carico con $r_0 = r_2 \sin \varphi$
 \downarrow
 $= p_z \cdot r_2 \sin \varphi d\theta \cdot r_1 d\varphi$

- $N_\theta \cdot r_1 d\varphi d\theta \cdot \sin \varphi$: contributo di N_θ

- $2(N_\varphi \cdot \sin \frac{d\varphi}{2} \cdot r_0 d\theta) =$
 $= 2N_\varphi \cdot \sin \frac{d\varphi}{2} \cdot r_0 d\theta = (N_\varphi \cdot r_0) \cdot (d\varphi d\theta)$



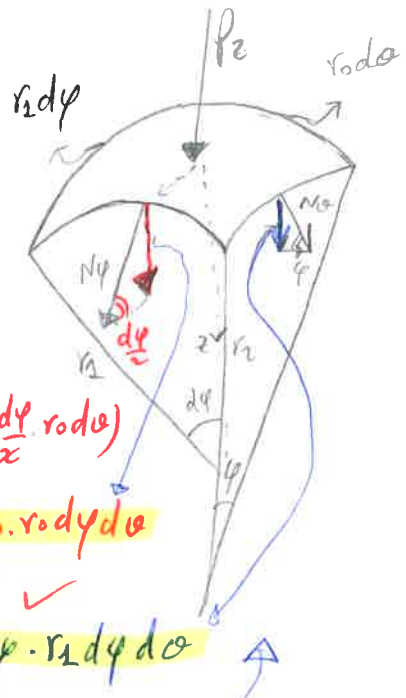
$\Sigma F_i = 0$

$p_z \cdot r_2 d\theta r_1 d\varphi \sin \varphi + N_\theta \cdot r_1 d\varphi d\theta \sin \varphi + N_\varphi \cdot r_0 \cdot d\varphi d\theta \sin \varphi = 0$

$p_z \cdot r_2 \cdot r_1 + N_\theta \cdot r_1 + N_\varphi \cdot r_0 = 0$

$\frac{N_\varphi}{r_1} + \frac{N_\theta}{r_2} = -p_z$

Ⓘ



eq. del equilibrio globale verticale:

$\int (N_\varphi \cdot \frac{d\varphi}{2} \cdot r_0 d\theta)$
 $= N_\varphi \cdot r_0 d\varphi d\theta$

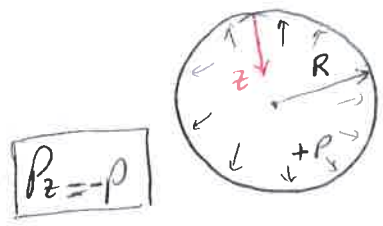
+↓ $(F) + 2\pi r_0 \cdot N_\varphi \cdot \sin \varphi = 0$

$N_\varphi = -\frac{F}{2\pi r_0 \cdot \sin \varphi}$

Ⓙ

$N_\theta \cdot \sin \varphi \cdot r_1 d\varphi d\theta$

e.g. Serbatoi sferico con pressione interna:



$R_1 = R_2 = R \Rightarrow r_1 = r_2 = r$

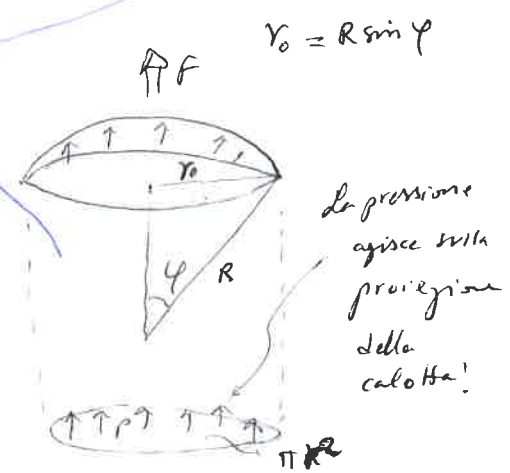
$= -p \cdot \pi r^2$

$F = -p \cdot \pi \cdot R^2 \sin^2 \varphi$

$\Rightarrow N_\varphi = + \frac{p \pi R^2 \cdot \sin^2 \varphi}{2\pi R \cdot \sin \varphi} = \frac{pR}{2}$

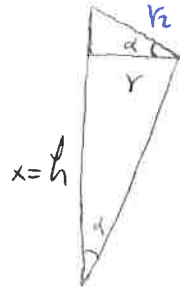
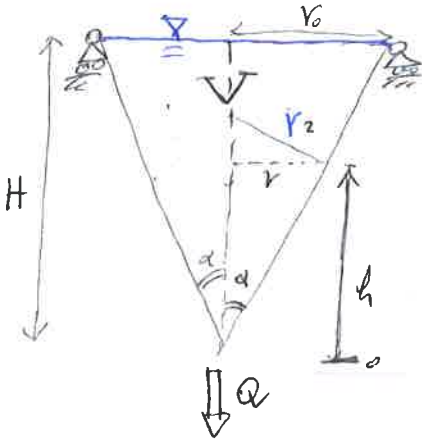
dalla Ⓘ \rightarrow

$N_\theta = \frac{pR}{2} = N_\varphi$



ES **SERBATOIO CONICO PER I LIQUIDI:**

voglio sapere quanto vale N_y e N_x in corrispondenza di "h".



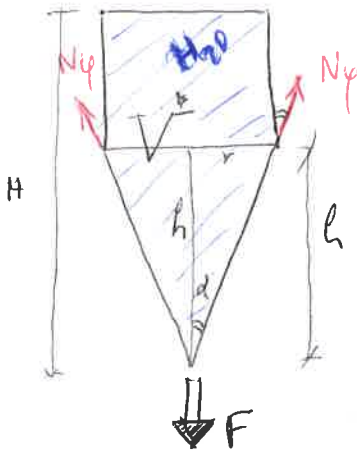
$$\frac{r}{\sin \alpha} = \frac{h}{\cos \alpha} \Rightarrow \boxed{r = h \tan \alpha}$$

$$\frac{r_2}{\frac{\sin \frac{\pi}{2}}{1}} = \frac{r}{\cos \alpha} \Rightarrow \boxed{r_2 = \frac{r}{\cos \alpha}}$$

$$\Rightarrow r_2 = \frac{h \tan \alpha}{\cos \alpha} = h \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha}$$

$$Q = \gamma \cdot V = \gamma \cdot \left(\frac{\pi \cdot r_0^2 \cdot H}{3} \right) = F$$

Prendo un'altezza generica h:



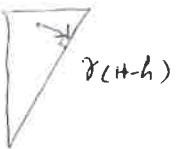
equilibrio verticale:

$$+\uparrow N_y \cos \alpha \cdot 2\pi r - F = 0$$

$$N_y \cos \alpha \cdot 2\pi \cdot (h \tan \alpha) - \gamma \cdot V^* = 0$$

$$\left\{ \begin{aligned} N_y \cos \alpha \cdot 2\pi \cdot (h \tan \alpha) - \gamma \left[\frac{\pi r^2 h}{3} + (H-h) \pi r^2 \right] &= 0 \\ \text{sostituendo } r = h \tan \alpha & \end{aligned} \right.$$

$$\Rightarrow \boxed{N_y = \frac{\gamma \cdot h \left[H - \frac{2}{3} h \right] \tan \alpha}{2 \cos \alpha}}$$



e $N_x = ?$

$$\frac{N_y}{r_2} + \frac{N_x}{r_2} = -P_z = +\gamma(H-h)$$

$$; P_z = -\gamma(H-h)$$

$$\Rightarrow \frac{N_x}{r_2} = +\gamma(H-h)$$

$$N_x = \gamma(H-h) \cdot R_2 = \gamma(H-h) \cdot \frac{r}{\cos \alpha} = \gamma(H-h) \cdot \frac{h \tan \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\Rightarrow \boxed{N_x = \gamma(H-h) \cdot \frac{h \tan \alpha}{\cos \alpha}}$$

e' lineare ed indipendente da N_y →

I. DIAGRAMMI

$N_p(H) = \frac{\gamma}{2} \frac{tg \alpha}{\cos \alpha} H \left(\frac{1}{3} H \right)$

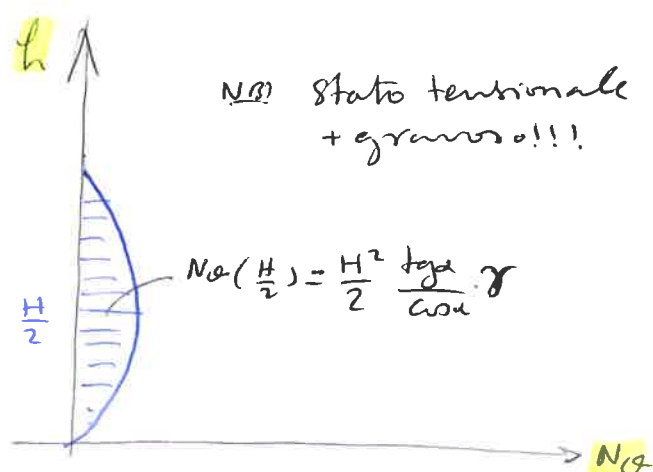
diminuisce perché l'incremento del carico è maggiore dell'incremento del parallelo!
 zona + sollecitata

$N_p = + \frac{\gamma \cdot h \left[H - \frac{2}{3} h \right] \tan \alpha}{2 \cos \alpha}$

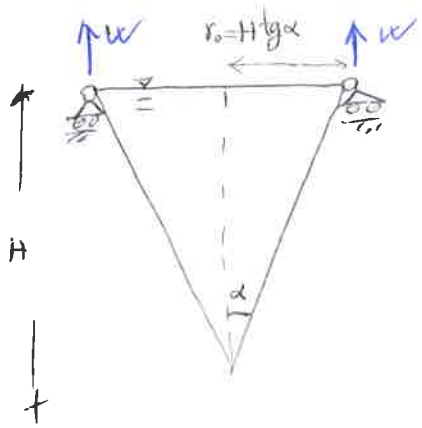
Sforzo membranale!

Sforzi circolariziale!

$N_\theta = \gamma (H - h) \cdot h \frac{\tan \alpha}{\cos \alpha}$



→ calcolo reazioni vincolari?

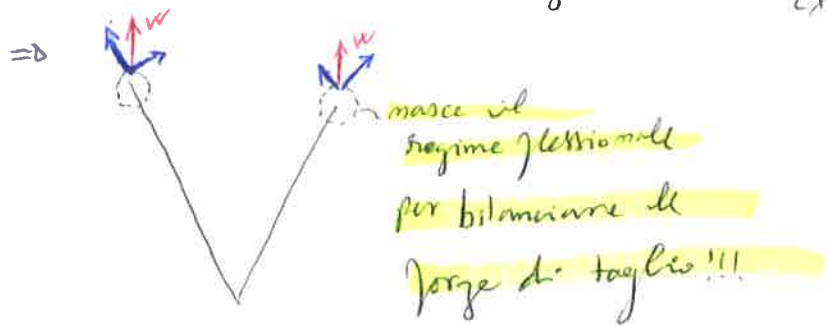


$W(2\pi r_0) = V_{tot} \cdot \gamma$

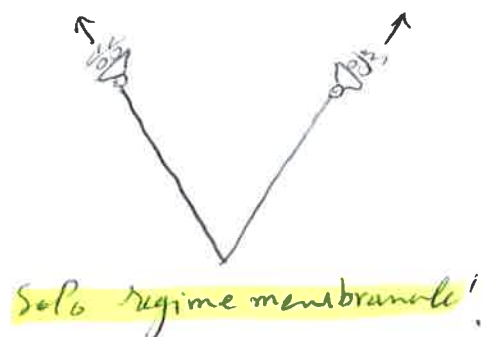
$V_{tot} = \frac{\pi r_0^2}{3} \cdot H = \frac{\pi}{3} (H tg \alpha)^2 \cdot H$

$\frac{r_0}{\sin \alpha} = \frac{H}{\cos \alpha} \rightarrow r_0 = H tg \alpha$

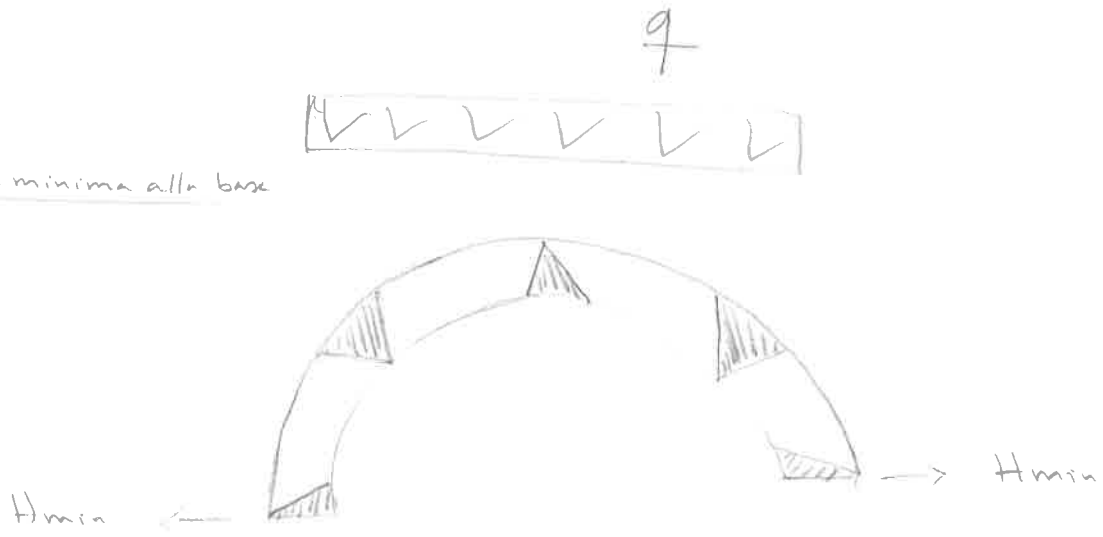
$W = \frac{V_{tot} \cdot \gamma}{2\pi (H tg \alpha)} = \frac{\frac{\pi}{3} (H tg \alpha)^2 \cdot H \cdot \gamma}{2\pi (H tg \alpha)} = \frac{H \cdot tg \alpha \cdot \gamma}{6}$



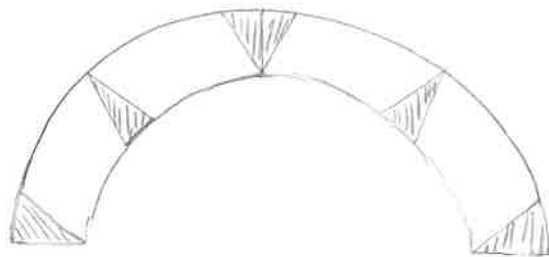
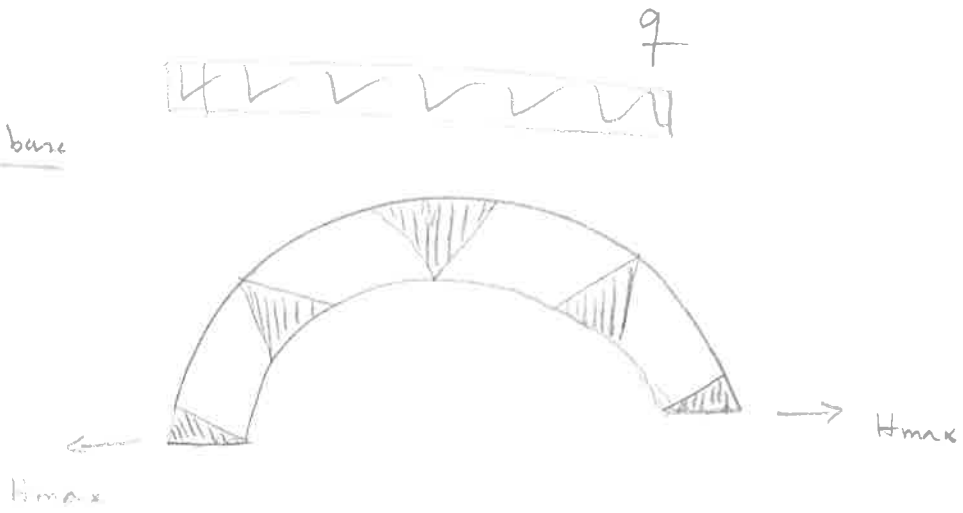
alternativi →



Spinta minima alla base



Spinta max alla base



$$\Rightarrow N_\varphi = -\rho_z \cdot R - N_\varphi$$

$$= -\gamma_s R \cos \varphi + \gamma_s \cdot R \frac{1 - \cos \varphi}{\sin^2 \varphi} = \gamma_s R \frac{1 - \cos \varphi - \sin^2 \varphi \cos \varphi}{\sin^2 \varphi}$$

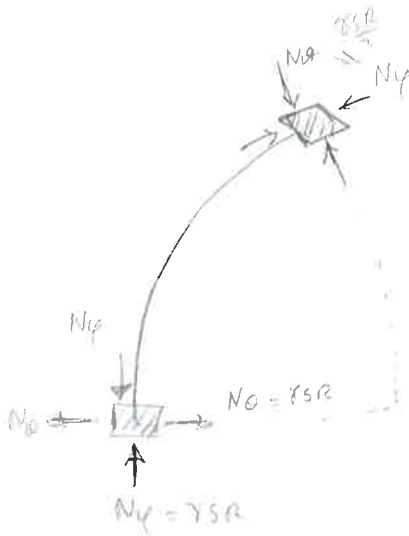
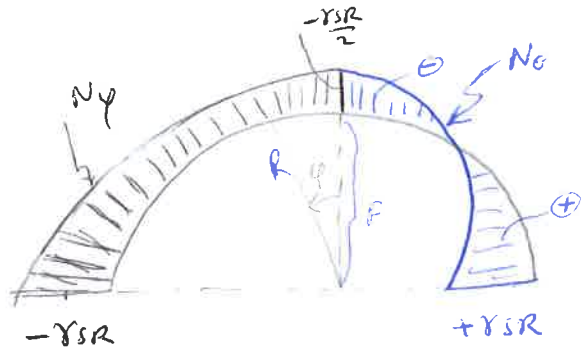
$$\Rightarrow N_\varphi = \frac{\gamma_s \cdot R \cdot [1 - \cos \varphi - \sin^2 \varphi \cdot \cos \varphi]}{\sin^2 \varphi} \quad \text{II}$$

Diagrammi

• Jacciò il limite di N_φ :

$$\left\{ \begin{aligned} \lim_{\varphi \rightarrow 0} N_\varphi &= \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\sin \varphi}{2 \sin^2 \varphi \cdot \cos \varphi} (\gamma_s R) = -\frac{\gamma_s R}{2} \\ N_\varphi(\pi/2) &= -\gamma_s R \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} N_\varphi(0) &= -\frac{\gamma_s \cdot R}{2} \\ N_\varphi(\pi/2) &= \gamma_s R \end{aligned} \right.$$



NOI nella struttura a 3D
 N_φ è auto-equilibrante!



osservazioni

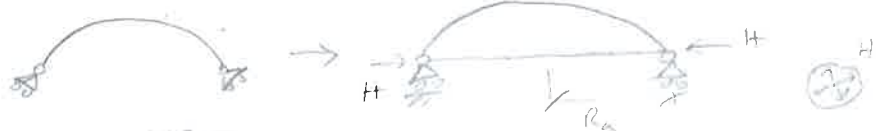
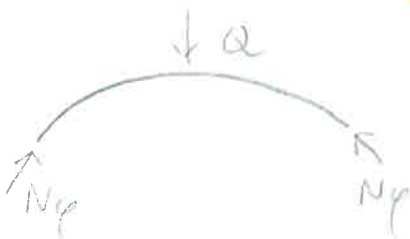
- cupola a tutto sesto:

$$N_{\text{max}} \text{ in } = \pi/2$$



- cupola a sesto ribasato

• struttura spingente: ha bisogno di una componente di vincolo anche orizzontale per garantire l'equilibrio



$$N = R_s \cdot \pi$$

ciò, qualora si traseuri la deformazione dovuta al taglio, è possibile assegnare sul contorno, invece delle tre condizioni [87. 13], soltanto l'inflessione w_n e la sua derivata normale $w_{n,n}$, in perfetta coerenza con il carattere biarmonico dell'equazione differenziale di Germain-Lagrange [86. 8].

Le condizioni precedenti comprendono il caso particolare di vincoli perfetti e di contorno libero da forze, ponendo in esse uguali a zero i valori prescritti.

Nel caso di appoggio semplice le condizioni al contorno risultano di tipo *misto*:

$$w_n(s) = 0, \quad M_n(s) = 0, \quad [87. 18]$$

e precisamente una condizione *geometrica* ed una *statica*.

88. Analogia della membrana.

In alcuni casi può riuscire utile sostituire l'equazione differenziale del quarto ordine [86. 8] con due equazioni differenziali del secondo ordine¹ formalmente analoghe all'equazione della membrana riportata in I [100. 21].

A tale scopo scriviamo la [86. 8] nella forma equivalente:

$$\nabla(w_{,xx} + w_{,yy}) = \frac{q^*}{D}, \quad [88. 1]$$

come si ottiene esplicitando uno degli operatori di Laplace, e sommiamo membro a membro le espressioni dei momenti flettenti fornite dalle prime due [86. 3]:

$$M_x + M_y = -D(1 + \nu)(w_{,xx} + w_{,yy}). \quad [88. 2]$$

Introdotta la definizione di *momento flettente ridotto*:

$$M^* = \frac{M_x + M_y}{1 + \nu}, \quad [88. 3]$$

otteniamo in definitiva, per sostituzione nelle [88. 1] e [88. 2], le due equazioni differenziali del secondo ordine:

$$M^*_{,xx} + M^*_{,yy} = -q^*, \quad w_{,xx} + w_{,yy} = -\frac{M^*}{D}. \quad [88. 4]$$

¹ H. MABOUS, *Die Theorie elastischer Gewebe*, 2^a ed., p. 12, Berlin (1932).

Il problema espresso in questo modo risulta particolarmente semplice nel caso di lastre di forma poligonale appoggiate lungo il contorno. Infatti dalle due condizioni al contorno:

$$w_n = 0, \quad M_n = -D(w_{n,ss} + \nu w_{n,nn}) = 0, \quad [88. 5]$$

si deduce per ogni lato rettilineo del contorno:

$$w_{n,ss} = 0, \quad w_{n,nn} = 0. \quad [88. 6]$$

In particolare, se la lastra è sollecitata da una distribuzione costante di momenti flettenti M_n applicati lungo il contorno, le equazioni differenziali [88. 4] divengono:

$$M^*_{,xx} + M^*_{,yy} = 0, \quad w_{,xx} + w_{,yy} = -\frac{M^*}{D}, \quad [88. 7]$$

e le condizioni al contorno [88. 6]:

$$w_n = 0, \quad M_n = -Dw_{n,nn}. \quad [88. 8]$$

La prima [88. 7] e la seconda [88. 8] sono verificate assumendo costante il momento ridotto $M^* = M_n$, per cui la somma $M_x + M_y$ si mantiene costante in tutti i punti della lastra, e nella seconda [88. 7] risulta costante il secondo membro.

Si conclude che la lastra ha la stessa superficie deformata di una membrana sollecitata da un carico uniformemente distribuito: poiché tale situazione è analoga a quella della torsione secondo Saint-Venant, come fu mostrato in I § 100, potremo utilizzare le soluzioni note per questo problema.

ESEMPIO 94. — *Lastre triangolare equilatera*. — Consideriamo la lastra semplicemente appoggiata lungo il contorno, indicata nella fig. 250, e sollecitata da una distribuzione uniforme di momenti flettenti lungo il contorno stesso. Assumiamo come inflessione $w(x, y)$ la funzione:

$$w(x, y) = c(y - a)(x/\sqrt{3} + y + 2a)(x/\sqrt{3} - y - 2a), \quad [88. 9]$$

ottenuta come prodotto delle equazioni dei tre lati, secondo il procedimento seguito in I § 101 c). Evidentemente tale espressione verifica la condizione $w_n = 0$ sul contorno.

Determiniamo la costante c in modo che sia verificata la seconda [88. 7]. Otteniamo così il valore $c = M_n/12aD$ e quindi:

$$w(x, y) = \frac{M_n}{12aD}(3x^2y - y^3 - 3ax^2 - 3ay^2 + 4a^3). \quad [88. 10]$$

Tenendo presenti le [86. 3] e [86. 4] e riportando al contorno i termini nelle derivate parziali con la formula di trasformazione di Gauss, possiamo anche scrivere:

$$I_A = - \int_{\Delta} (D \nabla \nabla v - q^*) \delta w \delta A + \int_C [(M_{nx} + M_{xy} \delta w_{n,x}) + (M_{xy} n_x + M_{yy} n_y) \delta w_{n,y} - (T_x n_x + T_y n_y) \delta w] ds. \quad [87. 5]$$

per la F. di Gauss
causa del dominio
C. R. contorno

In questa espressione si annulla il primo integrale perché in ogni punto di Δ deve essere verificata l'equazione differenziale [86. 9], mentre il secondo integrale può essere ulteriormente trasformato con riguardo alle [79. 7] e [80. 3]:

$$I_A = \int_C [M_{nx} (\delta w_{n,x} n_x + \delta w_{n,y} n_y) + M_{ny} (\delta w_{n,x} n_y - \delta w_{n,y} n_x) - T_n \delta w_n] ds, \quad [87. 6]$$

e, con riguardo alle due ultime [80. 4], introducendo le definizioni di momento flettente M_n e di momento torcente M_{ns} in un punto del contorno:

$$I_A = \int_C (M_n \delta w_{n,n} + M_{ns} \delta w_{n,s} - T_n \delta w_n) ds. \quad [87. 7]$$

In definitiva l'equazione dei lavori virtuali [87. 2] si riduce al seguente integrale esteso al contorno C :

$$\int_C [(M_n - \bar{M}_n) \delta w_{n,n} + (M_{ns} - \bar{M}_{ns}) \delta w_{n,s} - (T_n - \bar{T}_n) \delta w_n] ds = 0, \quad [87. 8]$$

o anche applicando la regola di derivazione del prodotto rispetto alla variabile s :

$$\int_C \{ (M_n - \bar{M}_n) \delta w_{n,n} + [(M_{ns} - \bar{M}_{ns}) \delta w_n]_{,s} - (M_{ns} - \bar{M}_{ns})_{,s} \delta w_n - (T_n - \bar{T}_n) \delta w_n \} ds = 0. \quad [87. 9]$$

Espletando l'integrazione rispetto a s del secondo termine, questo diviene:

$$[(M_{ns} - \bar{M}_{ns}) \delta w_n]_C = 0, \quad [87. 10]$$

come integrale su una linea chiusa di un differenziale totale.

Otteniamo così l'equazione dei lavori virtuali nella forma:

$$\int_C \{ (M_n - \bar{M}_n) \delta w_n - [(T_n + M_{ns,s}) - (\bar{T}_n + \bar{M}_{ns,s})] \delta w_n \} ds = 0, \quad [87. 11]$$

non resterà, n° remove
spazio di Kirchoff
legge n.

e, per l'arbitrarietà delle variazioni della derivata di spostamento $\delta w_{n,n}$ e dello spostamento δw_n , le due condizioni statiche al contorno:

$$M_n = \bar{M}_n, \quad T_n + M_{ns,s} = \bar{T}_n + \bar{M}_{ns,s}. \quad [87. 12]$$

Il procedimento seguito è sostanzialmente analogo a quello variazionale impiegato da КИРКОФФ¹ per la deduzione delle [87. 12].

Vediamo in conclusione che, trascurando la deformazione dovuta al taglio², è possibile assegnare sul contorno, invece delle tre condizioni [87. 1], soltanto il momento flettente M_n ed una combinazione $T_n + M_{ns,s}$ del taglio e della derivata del momento torcente.

Analogamente, se consideriamo le tre condizioni geometriche [85. 19] del problema generale:

$$w_n(s) = \bar{w}_n, \quad \varphi_n(s) = \bar{\varphi}_n, \quad \varphi_{ns}(s) = \bar{\varphi}_{ns}, \quad [87. 13]$$

l'equazione dei lavori virtuali assume la forma particolare:

$$\int_C (w \delta q + \varphi_x \delta m_x + \varphi_y \delta m_y) \delta A + \int_C (\bar{w}_n \delta T_n + \bar{\varphi}_n \delta M_n + \bar{\varphi}_{ns} \delta M_{ns}) ds = \int_C (\kappa_x \delta M_x + \kappa_y \delta M_y + \kappa_{xy} \delta M_{xy}) \delta A. \quad [87. 14]$$

Procedendo in modo formalmente analogo agli svolgimenti precedenti, otteniamo in definitiva l'equazione duale della [87. 8]:

$$\int_C [(w_{n,n} - \bar{w}_{n,n}) \delta M_n + (w_{n,s} - \bar{w}_{n,s}) \delta M_{ns} - (w_n - \bar{w}_n) \delta T_n] ds = 0 \quad [87. 15]$$

ed integrando rispetto a s :

$$\int_C [(w_{n,n} - \bar{w}_{n,n}) \delta M_n - (w_n - \bar{w}_n) (\delta T_n + \delta M_{ns,s})] ds = 0. \quad [87. 16]$$

L'arbitrarietà delle variazioni δM_n e $\delta T_n + \delta M_{ns,s}$ comporta così le due condizioni geometriche al contorno:

$$w_{n,n}(s) = \bar{w}_{n,n}, \quad w_n(s) = \bar{w}_n, \quad [87. 17]$$

¹ G. КИРКОФФ, Journ. reine angew. Math. v. 40, 51 (1850).
² E. REISSNER, Journ. Math. Phys., 23, 184-191 (1944).
O. ZAVARONI, Annali Triestini, 17, n. 1-2 (1946).

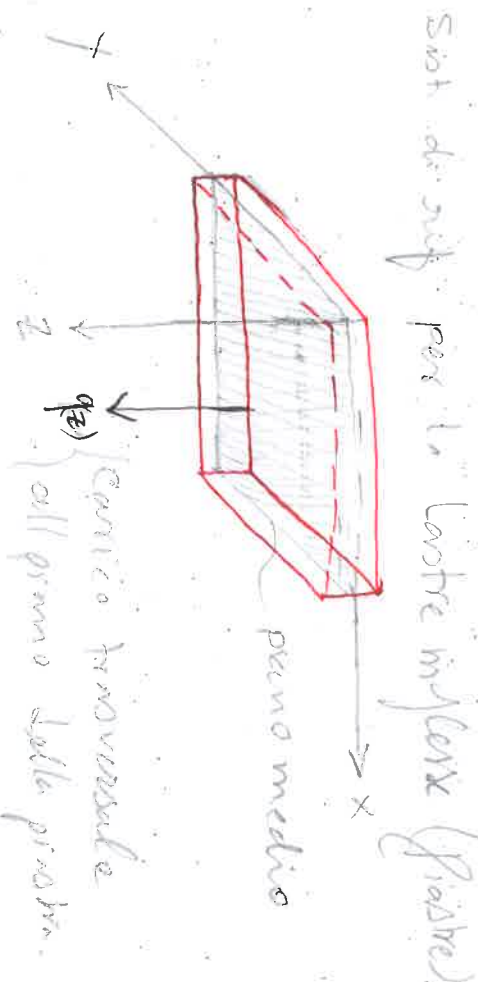
Vediamo dunque come la condizione di incastrato nella sezione terminale $x = 0$ può essere soddisfatta solo in termini della risultante T e non della distribuzione effettiva delle reazioni T_{xz} lungo il lato incastrato.

I risultati sono:

$$T_{xz} = \frac{T}{2b} \left[1 + \frac{y}{1+y} \left(\frac{b\sqrt{10} \operatorname{ch}(y\sqrt{10}/h)}{\operatorname{sh}(b\sqrt{10}/h)} - 1 \right) \right] \quad [85.50]$$

$$M_{xy} = -\frac{T}{2} \frac{y}{1+y} \left[\frac{y}{b} - \frac{\operatorname{sh}(y\sqrt{10}/h)}{\operatorname{sh}(b\sqrt{10}/h)} \right]$$

È interessante notare che la distribuzione del taglio T_{xz} si avvicina a quella prevista dalla teoria elementare della trave per grandi valori di b/h .



logio descrivere attraverso il principio dei lavori virtuali, le condizioni in caso di lastre inflesse.

CAPITOLO VIII
LASTRE INFLESSE

86. Equazione fondamentale delle lastre elastiche inflesse.

Qualora sia lecito trascurare l'influenza del taglio sulla deformazione di una lastra piana soggetta a carico trasversale rispetto al suo piano medio, parleremo di *lastre inflesse* in analogia con la denominazione usata per le travi. È però opportuno ricordare che nel caso di una lastra inflessa lo stato di deformazione è dovuto non solo ai momenti flettenti M_x e M_y , ma anche al momento torcente M_{xy} .

In tale ipotesi le equazioni di congruenza [85. 1], per $\gamma_{xz} = 0$ e $\gamma_{yz} = 0$, divengono:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_x &= -w_{,x} & \varphi_y &= -w_{,y} \\ \kappa_x &= -w_{,xx} & \kappa_y &= -w_{,yy} & \kappa_{xy} &= -2w_{,xy} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{in } \varphi \\ \text{di} \\ \text{Klein'sche} \end{array} \quad [86. 1]$$

Naturalmente, pur trascurando la deformazione dovuta alle forze di taglio, continuiamo a considerare la presenza di T_{xz} e T_{yz} come caratteristiche di sollecitazione, e ne omettiamo, per brevità di notazione, l'indice z .

Le due ultime equazioni costitutive [85. 6]:

$$T_x = GK\gamma_{xz}, \quad T_y = GK\gamma_{yz} \quad [86. 2] \rightarrow \text{Eckharts}$$

risultano allora indeterminate perché a dilatazioni angolari nulle deve corrispondere una rigidità a taglio $GK = \infty$ in modo che T_x e T_y abbiano valori finiti. Le uniche equazioni significative sono quindi le prime tre [85. 6] che, tenute presenti le [86. 1] assumono la forma:

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -D(w_{,xx} + \nu w_{,yy}), \\ M_y &= -D(w_{,yy} + \nu w_{,xx}), \\ M_{xy} &= -D(1 - \nu)w_{,xy} \end{aligned} \right\} D = \infty \quad [86. 3]$$